

**Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»**

*Утверждаю
Проректор НИУ ВШЭ
С.Ю. Роцин*

« » 2015 г.

**Программа
вступительного испытания в аспирантуру по направлению
01.06.01 Математика и механика,
профиль «01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика»**

*Разработана Академическим советом
Аспирантской школы по математике*

*Академический директор
Аспирантской школы по математике.
Куюмжиян К.Г.*

«26» марта 2015 г.

Москва
2015

Раздел 1. Теория вероятностей.

1. Основные понятия теории вероятностей.

- 1.1. Случайное явление в объективной реальности. Случайный эксперимент. Математическое описание случайного эксперимента.
- 1.2. Пространство элементарных событий. Алгебра и σ – алгебра событий. Операции над событиями и их свойства.
- 1.3. Аксиомы вероятности (система Колмогорова). Свойства вероятности.

2. Основные вероятностные схемы.

Классическое определение вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Непрерывные вероятностные пространства.

3. Условные вероятности и независимость.

- 3.1. Понятие условной вероятности. Вероятность совместного осуществления событий (формула умножения вероятностей). Независимость системы событий.
- 3.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

4. Последовательность независимых испытаний.

Вероятностное описание последовательности независимых испытаний (схема Бернулли). Дискретные вероятностные распределения, связанные с последовательностью независимых испытаний.

5. Случайные величины и распределения вероятностей.

- 5.1. Понятие случайной величины (идея и формальное определение).
- 5.2. Функции распределения случайных величин и их свойства.
- 5.3. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Общее описание. Основные виды дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений.
- 5.4. Совместные распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.
- 5.5. Распределения функций от случайных величин.

6. Числовые характеристики случайных величин и соответствующих вероятностных распределений.

- 6.1. Определение математического ожидания случайной величины. Свойства математического ожидания.
- 6.2. Определение дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии.
- 6.3. Моменты и центральные моменты высших порядков.
- 6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.
- 6.5. Классические неравенства, связанные с моментами. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышева.

- 6.6. Условные математические ожидания и условные распределения вероятностей относительно отдельных событий. Условные математические ожидания относительно систем событий.
 - 6.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение и его моментные характеристики.
7. Предельные теоремы в теории вероятностей.
- 8.1. Классические предельные теоремы в схеме независимых испытаний (локальная и интегральная).
 - 8.2. Математический аппарат для доказательства предельных теорем. Производящие функции. Характеристические функции случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности. Теорема непрерывности (необходимое и достаточное условие слабой сходимости в форме сходимости характеристических функций).
 - 8.3. Закон больших чисел. Закон больших чисел в форме Хинчина. Теорема о достаточных условиях применимости закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
 - 8.4. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова о достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
 - 8.5. Центральная предельная теорема теории вероятностей и ее различные формы. Центральная предельная теорема для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин (теорема Ляпунова). Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин. Условие Линдеберга.
8. Различные виды сходимости последовательностей случайных величин.

Сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, сходимость в среднем порядка p , $0 < p < \infty$. Сходимость с вероятностью, равной единице (сходимость почти наверное). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связи между различными видами сходимости.

Раздел 2. Основы теории случайных процессов.

9. Понятие случайного процесса.
- 9.1. Случайный процесс как семейство случайных величин, зависящих от временного параметра. Случайный процесс как функция двух аргументов. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса.
 - 9.2. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.
10. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова).

- 10.1. Определение марковской цепи. Различные формы марковского свойства.
 - 10.2. Вероятности перехода марковской цепи и их свойства. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
 - 10.3. Классификация состояний марковской цепи. Определения свойств существенности, возвратности, положительности и периодичности. Связи между свойствами существенности, возвратности и положительности для конечных и счетных марковских цепей.
 - 10.4. Предельное, эргодическое и стационарное распределения марковской цепи. Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения для конечной и счетной марковских цепей.
11. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.
- 11.1. Определение марковского процесса.
 - 11.2. Вероятности перехода марковского процесса и их свойства. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
 - 11.3. Инфинитезимальные характеристики марковского процесса (интенсивности перехода и выхода из данного состояния). Соотношения между интенсивностями перехода и выхода.
 - 11.4. Дифференциальные уравнения Колмогорова относительно переходных вероятностей (прямая и обратная системы).
 - 11.5. Свойства траекторий марковского процесса. Распределения вероятностей, описывающие характер траекторий.
 - 11.6. Процесс гибели и размножения. Основные свойства. Условия существования предельного (стационарного) распределения. Аналитическое представление для предельного распределения.
 - 11.7. Пуассоновский процесс. Различные определения пуассоновского процесса. Вероятности состояний и вероятности перехода пуассоновского процесса. Свойства траекторий.
12. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний.
- 12.1. Вероятностные характеристики марковского процесса. Вероятности перехода и их свойства. Плотности вероятностей перехода. Представление произвольных совместных распределений значений процесса через плотности вероятностей перехода.
 - 12.2. Определение диффузионного процесса. Дифференциальные уравнения для диффузионного процесса: обратное уравнение Колмогорова и прямое уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка.

Раздел 3. Математическая статистика.

13. Основные понятия математической статистики.

Задачи математической статистики. Понятие выборки. Вариационный ряд выборки. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Свойства

эмпирических функций распределения. Гистограмма. Выборочные моменты. Моменты выборочных среднего и дисперсии.

14. Основы теории оценивания неизвестных параметров распределений.
 - 14.1. Понятие точечной статистической оценки. Несмещенные оценки. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.
 - 14.2. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность оценки. Критерий Бхаттачария оптимальности оценки.
 - 14.3. Оценки максимального правдоподобия. Определение. Уравнения правдоподобия. Общие свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия (состоятельность, асимптотическая нормальность).
 - 14.4. Интервальное (доверительное) оценивание. Построение доверительных интервалов с использованием распределения точечной оценки параметра.
15. Статистическая проверка гипотез.
 - 15.1. Основные понятия и общие принципы теории проверки гипотез.
 - 15.2. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия χ^2 – квадрат К. Пирсона. Критерий χ^2 – квадрат для сложной гипотезы. Критерий пустых ящиков.
 - 15.3. Гипотеза и критерии однородности. Критерий однородности Смирнова. Критерий однородности χ^2 – квадрат.
 - 15.4. Гипотеза независимости. Критерий независимости χ^2 – квадрат. Критерий Спирмена. Критерий Кендалла.
16. Регрессионный анализ.
 - 16.1. Модель линейной регрессии. Описание модели. Оценивание неизвестных параметров (коэффициентов регрессии) в модели линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Оптимальность оценки, полученной по методу наименьших квадратов.
 - 16.2. Модель нормальной регрессии. Оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров нормальной регрессии. Совпадение оценок, полученных по методу наименьших квадратов, с оценками максимального правдоподобия.
 - 16.3. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии. F – критерий для проверки линейной гипотезы.

Раздел 4. Мартингалы в дискретном времени.

- 17.1. Вероятностное пространство с фильтрацией. Мартингалы, обобщённые мартингалы, мартингальные преобразования.
- 17.2. Марковские моменты. Теорема Дуба (о свободном выборе).
- 17.3. Мартингальные неравенства. Теоремы сходимости и их приложения.
- 17.4. Приложения: УЗБЧ, теорема Колмогорова о трёх рядах.

Раздел 5. Стохастический анализ.

- 18.1. Винеровский процесс и его свойства.
- 18.2. Система Хаара. Конструкция винеровского процесса.
- 18.3. Свойства траекторий винеровского процесса: недифференцируемость и бесконечность вариации.
- 18.4. Конструкция винеровского интеграла для функций из $L_2([0,1])$.
- 18.5. Кратные винеровские интегралы.
- 18.6. Квадратично-интегрируемые мартингалы. Неравенство Дуба.
- 18.7. Интеграл Ито. Непрерывность траекторий интегралов.
- 18.8. Непрерывные семимартингалы. Формула Ито.
- 18.9. Мартингальная характеристика винеровского процесса (теорема Леви).
- 18.10. Леви).
- 18.11. Линейное стохастическое уравнение, экспоненциальные мартингалы и условия равномерной интегрируемости.
- 18.12. Теорема Гирсанова.
- 18.13. Стохастические уравнения. Сильные и слабые решения. Условия существования сильного решения. Теорема о представлении функционалов заданных на траекториях винеровского процесса.

Основная литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей, – М.: издательство Едиториал УРСС, 2003.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: издательство ЛКИ, 2007.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: издательство ЛКИ, 2010.
4. Чжун К.Л., АитСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. – М.: издательство Бином. Лаборатория знаний, 2007.
5. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: издательство Государственный университет – Высшая школа экономики, 2005.
6. Ширяев А.Н. Вероятность (в двух томах). – М.: издательство МЦНМО, 2007.
7. Dekking F.M., Kraaikamp G., Lopuhaa H.P., Meester L.E.. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Cambridge University Press, 2005.
8. Suhov Y., Kelbert M.. Probability and Statistics by Exemple. Cambridge University Press, 2005.

Дополнительная литература

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Издательство Физматлит, 2007.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. – М.: Издательство Дрофа, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: издательство Высшая школа, 2000.

4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А. В. Задачи с решениями по математической статистике. – М.: издательство Дрофа, 2007.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: энциклопедия. Главный редактор Ю.В. Прохоров. – М.: издательство Большая Российская энциклопедия. 1999.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах). –М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2010.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: издательство Дрофа, 2007.
8. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam, North – Holland, 1970.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.. Статистика случайных процессов. Наука. 1974.
10. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991.