

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи
УДК 512.815.6

Буфетов Алексей Игоревич

**СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБИЕНИЯ
И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

01.01.06 — МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

Г.И. Ольшанский.

Москва – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Введение | 3 |
| ГЛАВА 1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРОВ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ | 11 |
| 1.1. Введение к главе 1 | 11 |
| 1.2. Основные леммы | 15 |
| 1.3. Доказательства теорем | 24 |
| ГЛАВА 2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЛАНШЕРЕЛЕВСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ | 31 |
| 2.1. Введение к главе 2 | 31 |
| 2.2. Предварительные сведения | 33 |
| 2.3. Формулировка результата | 47 |
| 2.4. Подсчет ковариации | 54 |
| 2.5. Доказательство асимптотической гауссовости | 60 |
| ГЛАВА 3. ПЕРЕМЕЖАЮЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КЕРОВА И СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ | 86 |
| 3.1. Введение к главе 3 | 86 |
| 3.2. Непрерывные диаграммы Юнга | 91 |
| 3.3 Доказательство теоремы 3.1.1 | 92 |
| 3.4 Доказательство теоремы 3.1.2 | 94 |
| 3.5 Связь с полукруговым распределением и распределением Марченко-Пастура | 98 |
| Литература | 100 |

Введение

Актуальность темы исследования.

Асимптотическая теория представлений изучает свойства представлений “больших” групп; фундаментальными примерами таких групп служат бесконечная симметрическая группа и бесконечномерная унитарная группа. Для подобных групп неприменимы многие методы и конструкции классической теории представлений. Тем не менее, в результате работ А.М. Вершика, С.В. Керова, Г.И. Ольшанского, А.Ю. Окунькова, А.М. Бородина и других математиков была построена теория представлений “больших” групп, выявляющая как тесные параллели с классической теорией представлений конечных и компактных групп, так и новые эффекты, не имеющие аналога в классическом случае. Одной из наиболее интересных особенностей этой теории является наличие большого количества взаимосвязей с разными областями математики, такими как алгебраическая комбинаторика, случайные матрицы, свободная вероятность, теория интегрируемых систем и другими.

Бесконечная симметрическая группа может быть определена как (индуктивный) предел последовательности симметрических групп растущего размера; аналогично, бесконечномерная унитарная группа может быть определена как (индуктивный) предел последовательности унитарных групп растущей размерности. В связи с этим возникает естественный вопрос: как связаны характеры бесконечных объектов и классические характеры конечных симметрических групп (или компактных унитарных групп)? Оказывается, эта взаимосвязь может быть описана с помощью вероятностных мер на комбинаторных объектах — разбиениях, и предельных теорем вероятностного характера, описывающих предельное поведение таких мер с ростом размеров

групп.

Данная работа посвящена задачам асимптотической теории представлений, возникающим при анализе этих вероятностных мер. Полученные результаты естественным образом продолжают работы А.М. Вершика и С.В. Керова о характерах бесконечной симметрической группы, А.М. Бородина и П. Феррари о характерах бесконечномерной унитарной группы и связанной с ними динамики на комбинаторных объектах, С.В. Керова о взаимосвязи асимптотической теории представлений и теории случайных матриц. В то же время, в данной работе возникает новый тип вопросов — исследование предельного поведения представлений в контексте некоммутативной вероятности.

Степень разработанности темы исследования.

Пусть $S(n)$ — группа перестановок порядка n . Зададим последовательность

$$S(1) \subset S(2) \subset \dots \subset S(n) \subset S(n+1) \subset \dots,$$

в которой вложение $S(n) \subset S(n+1)$ задается условием, что перестановки из S_n оставляют на месте $n+1$ -ый элемент. *Бесконечной симметрической группой* называется объединение этой цепочки групп:

$$S(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n).$$

Характером бесконечной симметрической группы называется функция $\chi : S(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) Выполнено $\chi(e) = 1$, где e — единица группы $S(\infty)$.
- 2) Для любых $g, h \in S(\infty)$ выполнено $\chi(gh) = \chi(hg)$.
- 3) Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых g_1, \dots, g_k матрица $[\chi(g_i^{-1}g_j)]_{i,j=1}^k$ неотрицательно определена.

Легко видеть, что множество характеров $S(\infty)$ является выпуклым. Задача нахождения границы (множества экстремальных точек) этого множества была решена Э. Тома. Оказывается, что экстремальные характеры взаимно однозначно соответствуют наборам параметров $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ — вещественные числа,

удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \dots \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) + \gamma = 1.$$

Хорошо известно, что неприводимые представления группы $S(n)$ параметризуются диаграммами Юнга из n клеток. Будем обозначать символом χ^λ нормированный (равный единице в единице группы) характер неприводимого представления $S(n)$, отвечающего диаграмме Юнга λ . Пусть \mathbb{Y}_n — множество всех диаграмм Юнга из n клеток.

Для экстремального характера $\chi^{\mathcal{P}}$, отвечающего набору параметров \mathcal{P} , существует разложение:

$$\chi^{\mathcal{P}}|_{S(n)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M_n^{\mathcal{P}}(\lambda) \chi^\lambda.$$

Несложно показать, что коэффициенты $M_n^{\mathcal{P}}(\lambda)$ задают вероятностную меру на \mathbb{Y}_n . В связи с этим возникает вопрос: как выглядит случайная диаграмма Юнга (распределенная по мере $M_n^{\mathcal{P}}$) при $n \rightarrow \infty$?

Пусть λ_i — длина i -ой строки диаграммы Юнга, и пусть λ'_j — длина j -ого столбца. А.М. Вершик и С.В. Керов [37] показали, что для длин строк случайных диаграмм Юнга выполнен следующий закон больших чисел:

$$\frac{\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow{prob} \alpha_i, \quad \frac{\lambda'_j{}^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow{prob} \beta_j.$$

В первой главе делается следующий шаг в изучении вероятностных мер $M_n^{\mathcal{P}}$ — доказывается центральная предельная теорема для длин строк и столбцов.

Одним из наиболее интересных примеров мер на диаграммах Юнга является *мера Планшереля*, возникающая как $M_n^{\mathcal{P}_0}$ для набора параметров \mathcal{P}_0 , отвечающего $\gamma = 1$ и всем другим параметрам равным 0. Для этой меры А.М. Вершик и С.В. Керов [54] доказали, что случайная диаграмма Юнга λ имеет глобальную предельную форму.

Более подробно, каждой диаграмме Юнга λ можно сопоставить функцию $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, как показано на рисунке 1. Для случайной диаграммы Юнга распределенной по мере Планшереля А.М. Вершик и С.В. Керов [54] и, независимо, Ф. Логан и Л.А.

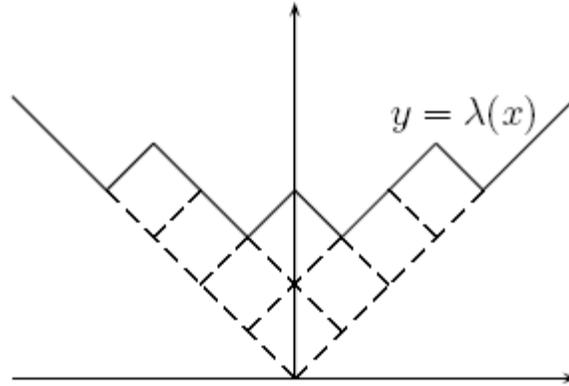


Рис. 1: Функция $\lambda(x)$, сопоставляемая диаграмме Юнга $\lambda = (4, 2, 1, 1)$.

Шепп [38] доказали, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{nx}) - \Omega(x) \right| = 0, \quad \text{по вероятности,}$$

для некоторой детерминированной предельной функции $\Omega(x)$, которую мы будем называть *кривой Вершика-Керова*.

Теорема Керова [26] дает описание глобальных флуктуаций случайной функции $\lambda(x)$ вокруг кривой $\Omega(x)$. Оказывается, что эти флуктуации могут быть описаны с помощью некоторого гауссовского процесса.

Вторая глава данной диссертации посвящена схожему типу вопросов, возникающих для бесконечномерной унитарной группы и одного из ее экстремальных характеров — так называемого одностороннего планшерелевского характера. В этом контексте результат о предельной форме был получен Ф. Бианом [6], а результат о флуктуациях вокруг предельной формы — А.М. Бородиным и П. Феррари [11]. Однако, основным объектом изучения второй главы являются некоммутативные случайные величины.

Более подробно, вероятностные результаты, описывающие глобальное поведение случайной диаграммы Юнга, могут быть интерпретированы как предельное поведение некоторых случайных величин, определенных на некоммутативном вероятност-

ном пространстве. Сами эти величины коммутируют, поэтому результат может быть сформулирован в терминах классической теории вероятностей. Однако, возникает вопрос: а каково предельное поведение некоммутативных случайных величин, определенных на некоммутативном вероятностном пространстве? Во второй главе диссертации мы доказываем центральную предельную теорему для некоторого семейства некоммутирующих случайных величин. Особенностью данной теоремы является тот факт, что допредельные некоммутирующие величины стремятся к коммутативному пределу, который может быть проинтерпретирован с помощью классической теории вероятностей.

Третья глава диссертации посвящена связи асимптотической теории представлений и теории случайных матриц. Следуя С.В. Керову ([30], [31], [32]), каждой симметричной матрице сопоставляется кусочно-линейная функция, которую естественно считать *обобщенной диаграммой Юнга*. Мы исследуем асимптотическое поведение этой обобщенной диаграммы Юнга для широкого класса случайных матриц — вигнеровских матриц. Оказывается, что в пределе (рост размера матрицы к бесконечности) возникает кривая $\Omega(x)$ — кривая Вершика-Керова! Это указывает на тесную взаимосвязь между диаграммами Юнга, распределенными по мере Планшереля, и вигнеровскими случайными матрицами. Результаты иного типа, показывающие схожесть этих вероятностных моделей, были получены в работах [4], [13], [27].

Цель работы.

Найти асимптотическое поведение экстремальных характеров бесконечной симметрической группы. Провести подробное исследование возникающей вероятностной модели. Найти асимптотическое поведение элементов универсальной обертывающей алгебры бесконечномерной унитарной группы в планшерелевском представлении. Описать предельный объект в этой модели. Исследовать рост диаграммы разбиения спектра двух последовательных вигнеровских матриц.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказана центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы
2. Установлена взаимосвязь между вероятностными мерами на диаграммах Юнга, порожденными экстремальными характеристиками бесконечной симметрической группы, и вероятностной моделью с независимыми испытаниями.
3. Исследовано асимптотическое поведение элементов универсальной обертывающей алгебры бесконечномерной унитарной группы. Доказана центральная предельная теорема для возникающих некоммутативных случайных величин. Описан предельный объект — семейство гауссовских свободных полей.
4. Доказан закон больших чисел для диаграмм разделения корней вигнеровских и уишартовских матриц.

Личный вклад автора. Результаты первой и третьей главы получены диссертантом лично. Результаты второй главы получены в соавторстве с А.М. Бородиным.

Методы исследования. Центральное место в работе занимают алгебраические и комбинаторные методы, такие как техника вычислений в алгебрах симметрических и сдвинуто-симметрических функций, методы перечислительной и алгебраической комбинаторики. Автором разработан новый метод асимптотического анализа вероятностных мер на диаграммах Юнга; также была разработана новая техника вычислений в универсальной обертывающей алгебре бесконечномерной унитарной группы.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в асимптотической теории представлений, в исследовании вероятностных комбинаторных моделей, в теории случайных матриц, в алгебраической комбинаторике, в теории свободной вероятности и в моделях статистической механики.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- научно-исследовательском семинаре Добрушинской математической лаборатории, Институт проблем передачи информации РАН, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре “Эргодическая теория и математическая физика”, механико-математический факультет МГУ, неоднократно в 2011-2013 г.
- научно-исследовательском семинаре “Теория представлений и вероятность”, факультет математики ВШЭ, неоднократно в 2011-2014 г.
- научно-исследовательском семинаре “Характеристические классы и теория пересечений”, факультет математики ВШЭ, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре “Динамические системы”, механико-математический факультет МГУ, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре “Интегрируемая теория вероятностей”, Массачусеттский Технологический Институт, 2013-2014 г.
- научно-исследовательском семинаре “Семинар факультета математики”, университет г. Утрехт, 2011 г.
- научно-исследовательском семинаре “Теория вероятностей”, Будапештский технологический университет, 2012 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, — [9], [10], [18], [19], — 4 из которых опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Г.И. Ольшанскому за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор глубоко благодарен А.М. Бородину за многочисленные полезные обсуждения.

Глава 1

Центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы

1.1 Введение к главе 1

Пусть \mathbb{Y}_n — множество диаграмм Юнга из n клеток. Определим градуированный граф Юнга \mathbb{Y} , множеством вершин которого служит $\cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Y}_n$, а ребро между диаграммами λ и μ проведено в том и только в том случае, если $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, $\mu \in \mathbb{Y}_{n+1}$ и μ получается из λ добавлением одной клетки (в этом случае будем писать $\lambda \uparrow \mu$). Пусть $\dim \lambda$ — число различных кратчайших путей в \mathbb{Y} от одноклеточной диаграммы Юнга до диаграммы λ .

Когерентной системой мер на \mathbb{Y} называется последовательность $\{M_n\}$, где M_n — вероятностная мера на \mathbb{Y}_n , для которой выполнено соотношение

$$M_n(\nu) = \sum_{\lambda: \nu \uparrow \lambda} \frac{\dim \nu}{\dim \lambda} M_{n+1}(\lambda), \quad \text{для любого } \nu \in \mathbb{Y}_n.$$

Хорошо известно, что характеры бесконечной симметрической группы взаимно однозначно соответствуют когерентным системам мер на \mathbb{Y} . По теореме То-

ма (см. [52]) экстремальные характеры описываются множеством параметров $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ — вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) + \gamma = 1.$$

Пусть $\{M_n^{\mathcal{P}}\}$ — когерентная система мер, соответствующая фиксированному набору параметров \mathcal{P} . Обозначим символом $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)$ длину i -ой строки случайной диаграммы Юнга, выбранной по мере $M_n^{\mathcal{P}}$, а символом $\lambda_j^{\prime\mathcal{P}}(n)$ — длину j -ого столбца этой диаграммы. Нашей основной задачей является изучение асимптотического поведения этих величин.

Известно (см. [37],[35],[36]), что для длин строк и столбцов выполнен закон больших чисел:

$$\frac{\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow{prob} \alpha_i, \quad \frac{\lambda_j^{\prime\mathcal{P}}(n)}{n} \xrightarrow{prob} \beta_j.$$

Центральная предельная теорема для случая $\alpha_i = (1-q)q^{i-1}$, $\beta_j = 0, \gamma = 0$ была установлена в [22]. Основным результатом данной статьи является центральная предельная теорема для случая строго монотонных последовательностей $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$. Точнее говоря, будем рассматривать множества параметров \mathcal{P} , для которых выполнено

$$\alpha_i > \alpha_{i+1} \text{ для всех } i \text{ таких, что } \alpha_i \neq 0,$$

$$\beta_j > \beta_{j+1} \text{ для всех } j \text{ таких, что } \beta_j \neq 0. \quad (1.1.1)$$

Заметим, что условие неравенства параметров существенно: например, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \frac{1}{k}$, то флуктуации не являются гауссовыми (см. [29], [27]).

Теорема 1.1.1. (Центральная предельная теорема) Пусть \mathcal{P} — произвольный набор параметров, удовлетворяющий (1.1.1), и $K, L > 0$ таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_K > 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_L > 0$. Тогда:

$$\left(\frac{\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_1^{\prime\mathcal{P}}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_L^{\prime\mathcal{P}}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{Law} Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k, Z'_1, \dots, Z'_L),$$

где Z — многомерная гауссова случайная величина с моментами

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Z_i &= 0, & \mathbf{E}Z'_i &= 0, \\ \mathbf{E}Z_i^2 &= \alpha_i - \alpha_i^2, & \mathbf{E}Z_i'^2 &= \beta_i - \beta_i^2, \\ \mathbf{E}Z_i Z_j &= -\alpha_i \alpha_j, & \mathbf{E}Z_i' Z_j' &= -\beta_i \beta_j, & \mathbf{E}Z_i Z_j' &= -\alpha_i \beta_j.\end{aligned}$$

Независимо и одновременно эта теорема была также доказана в работе [41] с помощью других методов.

Замечание 1. Пусть $\{X_i\}$, $\{Y_j\}$, Θ — независимые в совокупности гауссовы случайные величины с нулевым средним и дисперсиями

$$\mathbf{E}X_i^2 = \alpha_i, \quad \mathbf{E}Y_j^2 = \beta_j, \quad \mathbf{E}\Theta^2 = \gamma,$$

при этом X_i, Y_j определены для всех ненулевых α - и β - параметров. Тогда распределение $(Z_1, \dots, Z_K, Z'_1, \dots, Z'_L)$ совпадает с проекцией на первые $K + L$ координат условного распределения на гиперплоскости $X_1 + \dots + X_K + X_{K+1} + \dots + Y_1 + \dots + Y_L + Y_{L+1} + \dots + \Theta = 0$.

Замечание 2. Пусть \widetilde{M}_ν^P — мера на \mathbb{Y} , являющаяся пуассонизацией последовательности мер M_n^P :

$$\widetilde{M}_\nu^P(\lambda) := e^{-\nu} \frac{\nu^{|\lambda|}}{|\lambda|!} M_{|\lambda|}^P(\lambda),$$

где символом $|\lambda|$ обозначено число клеток в диаграмме λ , и $\tilde{\lambda}_i^P(\nu)$, $\tilde{\lambda}'_j(\nu)$ — длины i -ой строки и j -ого столбца случайной диаграммы Юнга, взятой по этой мере. В условиях теоремы 1 выполнено

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde{\lambda}_1^P(\nu) - \alpha_1 \nu}{\sqrt{\nu}}, \frac{\tilde{\lambda}_2^P(\nu) - \alpha_2 \nu}{\sqrt{\nu}}, \dots, \frac{\tilde{\lambda}_K^P(\nu) - \alpha_K \nu}{\sqrt{\nu}}, \frac{\tilde{\lambda}'_1(\nu) - \beta_1 \nu}{\sqrt{\nu}}, \right. \\ \left. \dots, \frac{\tilde{\lambda}'_L(\nu) - \beta_L \nu}{\sqrt{\nu}} \right) \xrightarrow[\text{Law}]{\nu \rightarrow \infty} (X_1, X_2, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть \mathcal{A} — алфавит, состоящий из дискретной части — множеств $L_e = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $L_o = \{y_1, y_2, \dots\}$, и непрерывной части G , которую будем считать отрезком. Введем на \mathcal{A} вероятностную меру μ_1 , сопоставляя букве x_i вероятность α_i , букве y_j —

вероятность β_j и считая, что на G задана мера Лебега с условием $\mu_1(G) = \gamma$; зададим на \mathcal{A}^n бернуллиевскую меру $\mu_n = \mu_1^{\otimes n}$. Обозначим символом $N_{x_i}(n)$ случайную величину, равную числу букв x_i в случайном слове $w \in \mathcal{A}^n$, выбранном по мере μ_n , а символом $N_{y_j}(n)$ — число букв y_j в этом слове. Будем считать, что на \mathcal{A} введено некоторое линейное упорядочение p . Как было показано в [56], с помощью обобщенного RSK-алгоритма можно построить отображение

$$\phi_p : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{Y}_n$$

такое, что мера μ_n под действием ϕ_p переходит в меру $M_n^{\mathcal{P}}$. В силу этого можно считать, что величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n), \lambda'_j{}^{\mathcal{P}}(n)$ заданы на вероятностном пространстве (\mathcal{A}^n, μ_n) .

Теорема 1.1.2. *Пусть \mathcal{P} — произвольный набор параметров, удовлетворяющий (1.1.1), и $K, L > 0$ таковы, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_K > 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_L > 0$. Определим функции*

$$\begin{aligned} \epsilon_1(n) &:= \lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_1}(n), \\ \epsilon_2(n) &:= \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_2}(n), \\ &\vdots \\ \epsilon_K(n) &:= \lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_K}(n), \\ \epsilon'_1(n) &:= \lambda'_1{}^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_1}(n), \\ &\vdots \\ \epsilon'_L(n) &:= \lambda'_L{}^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_L}(n). \end{aligned}$$

Тогда существует константа $C = C(K, L)$ (не зависящая от n) такая, что

$$\mathbf{E}|\epsilon_i(n)| < C, \quad \mathbf{E}|\epsilon'_j(n)| < C, \quad i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, L.$$

Теорема 1 является простым следствием теоремы 2.

Замечание 3. В определении величин $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n)$ на пространстве (\mathcal{A}^n, μ_n) имеется неоднозначность, связанная с произвольностью выбора линейного упорядочения алфавита \mathcal{A} . Как будет показано в разделе 1.2.2, величины $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_i}(n)$ имеют одинаковое распределение при любых упорядочениях.

Замечание 4. Пусть $\tilde{\mu}_\nu(w)$ — мера на словах произвольной длины из букв алфавита \mathcal{A} , определяемая по формуле

$$\tilde{\mu}_\nu(w) := \frac{\nu^{|w|}}{|w|!} \mu_{|w|}(w),$$

где $|w|$ — число букв в слове w . Будем обозначать символом $\tilde{N}_{x_i}(\nu)$ (соотв. $\tilde{N}_{y_j}(\nu)$) число букв x_i (соотв. y_j) в случайном слове w , взятом по мере $\tilde{\mu}_\nu$. В тех же предположениях утверждение теоремы 2 выполнено для разностей $\tilde{\lambda}'_i(\nu) - \tilde{N}_{x_i}(\nu)$, $\tilde{\lambda}'_j(\nu) - \tilde{N}_{y_j}(\nu)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 5. Теорема 2 может быть переформулирована в терминах, не использующих RSK-алгоритм. Для этого величины $\lambda'_i(n)$, $\lambda'_j(n)$ следует определять на вероятностном пространстве, состоящем из \mathcal{A}_p -таблиц (см. определение в 2.1).

1.2 Основные леммы

1.2.1

В этом разделе мы перескажем часть материала из [56].

Пусть на алфавите \mathcal{A} задано линейное упорядочение p . Будем писать $x \nearrow y$, если $x < y$ или $x = y \in L_e$, и $x \searrow y$, если $x > y$ или $x = y \in L_o \cup G$. Назовем слово $w = x_1 x_2 \dots x_n$ *возрастающим*, если $x_1 \nearrow x_2 \nearrow \dots \nearrow x_n$, и *убывающим*, если $x_1 \searrow x_2 \searrow \dots \searrow x_n$. Определим \mathcal{A}_p -таблицу формы λ как диаграмму Юнга λ , заполненную буквами из \mathcal{A} , при этом вдоль строк стоят возрастающие слова, а вдоль столбцов, читаемых снизу вверх, стоят убывающие слова (см. пример ниже). Обобщенный RSK-алгоритм сопоставляет слову $w \in \mathcal{A}^n$ пару $(R(w), S(w))$, где $R(w)$ — \mathcal{A}_p -таблица, а $S(w)$ — стандартная¹ таблица Юнга, при этом $R(w)$ и $S(w)$ имеют одну и ту же форму λ . Отображение

$$\phi_p: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{Y}_n$$

¹Стандартной таблицей Юнга называется диаграмма λ , заполненная числами от 1 до $|\lambda|$, каждое из которых встречается ровно по одному разу, и вдоль всех строк и столбцов которой стоят возрастающие последовательности.

определяется как сопоставление слову w этой формы λ . Опишем действие обобщенного RSK-алгоритма.

Определим сначала алгоритм строчной вставки; по \mathcal{A}_p -таблице T и букве $x \in \mathcal{A}$ он строит новую \mathcal{A}_p -таблицу, которая обозначается как $x \rightarrow T$. Эта таблица содержит на одну клетку больше, чем T , а множество её элементов содержит те же элементы, что и в T , а также элемент x . Предположим, что $x \in L_e$. Тогда расстановка этих элементов определяется следующим образом: если x больше или равен каждому элементу из первой строки, то просто ставим его в новую клетку в конце первой строки. В противном случае находим самый маленький элемент первой строки, строго превосходящий x . Выбиваем этот элемент из клетки и ставим x на его место. Если же $x \in L_o$, то правило аналогично, только x может выбивать не только строго большие элементы, но и равные себе. С выбитым элементом повторяем те же действия относительно второй строчки. Продолжаем этот процесс, пока очередной выбитый элемент не оказывается в конце очередной строчки или не выбивается из последней строки — в этом случае образуем новую строку из одного элемента.

Для $w = x_1 x_2 \dots x_n$ определим $R(w)$ формулой

$$R(w) := [(x_n \rightarrow (x_{n-1} \rightarrow (x_{n-2} \cdots \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow \emptyset)) \dots))]]$$

На каждом шаге алгоритма к $R(w)$ присоединяется одна новая клетка. Таблица Юнга $S(w)$ определяется нумерацией клеток в порядке их присоединения к $R(w)$.

Пример. Пусть $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$ и $L_e = \{x_1, x_2\}$, $L_o = \{y_1, y_2\}$. Тогда слово $w = x_1 y_1 y_1 y_2 x_2 x_1 y_1$ под действием обобщенного RSK-алгоритма перейдёт в пару таблиц:

| | | |
|-------|-------|-------|
| x_1 | x_1 | y_1 |
| x_2 | y_2 | |
| y_1 | | |
| y_1 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 7 | |
| 5 | | |
| 6 | | |

Обозначим максимальное натуральное число, которое можно получить как сум-

му длин k непересекающихся возрастающих (соотв. убывающих) подпоследовательностей слова w , символом $r_k(w)$ (соотв. $c_k(w)$).

Предложение 1.2.1. а) *Обобщенный RSK-алгоритм дает биекцию между \mathcal{A}^n и парами (R, S) , где R — \mathcal{A}_p -таблица, S — таблица Юнга и R, S имеют общую форму, состоящую из n клеток.*

б) *Выполнены равенства:*

$$r_k(w) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\phi_p(w)) ; \quad c_k(w) = \sum_{j=1}^k \lambda'_j(\phi_p(w)).$$

Доказательство. Это утверждение является обобщением теоремы Шенстеда (см. [51]). Как указано в [56, Prop.1], доказательство аналогично доказательству теоремы Шенстеда (см., например, [23]). \square

Пусть Λ — алгебра симметрических функций от бесконечного числа переменных (см. [39, Ch. 1.2]). Обозначим символом h_n полные однородные симметрические функции, а символом s_λ — функции Шура. Определим производящую функцию элементов h_n формулой

$$H(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n$$

и пусть

$$\pi^{\mathcal{P}} : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$$

— гомоморфизм, задаваемый на базисе $\{h_n\}$ формулой

$$\pi^{\mathcal{P}}(H(z)) = e^{\gamma z} \prod_{i \geq 1} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}$$

Предложение 1.2.2. а) *Пусть $P_{\mathcal{P}}(\lambda)$ — вероятность того, что заполнение диаграммы λ независимыми случайными буквами с распределением μ_1 окажется \mathcal{A}_p -таблицей. Тогда*

$$P_{\mathcal{P}}(\lambda) = \pi^{\mathcal{P}}(s_\lambda)$$

б) *Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Тогда:*

$$\mu_n(w : \phi_p(w) = \lambda) = \dim \lambda \pi^{\mathcal{P}}(s_\lambda) = M_n^{\mathcal{P}}(\lambda)$$

Доказательство. См. [56, Prop.3 и Th.1]. □

Существуют другие обобщения RSK-алгоритма (см. [5], [49]), сохраняющие свойства утверждений 1а) и 2б), но не удовлетворяющие утверждению 1б).

1.2.2

Будем называть множество $I \subset \mathcal{A}$ *интервалом*, если из неравенств:

$$a_1 < a < a_2, \quad a_1, a_2 \in I, a \in \mathcal{A}$$

следует, что $a \in I$. Для удобства в дальнейшем будем считать упорядочения алфавита \mathcal{A} такими, что G образует интервал.

Обозначим символами $n_i(R)$, $n'_j(R)$ число букв x_i и y_j в \mathcal{A}_p -таблице R . Назовем типом \mathcal{A}_p -таблицы R совокупность чисел

$$\text{type}(R) := (\{n_i(R)\}, \{n'_j(R)\}, m),$$

где m — число букв из G , стоящих в клетках R .

Напомним, что различным порядкам на \mathcal{A} соответствуют различные отображения

$$\phi_p: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{Y}_n.$$

Лемма 1.2.1. Пусть зафиксированы набор чисел $(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)$ и диаграмма $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. Тогда величина

$$\mu_n(w \in \mathcal{A}^n : \phi_p(w) = \lambda; \text{type}(R(w)) = (\{n_i\}; \{n'_j\}; m))$$

не зависит от упорядочения p .

Доказательство. Заметим, что вероятность совпадения двух букв из G в слове w равна 0, поэтому можно считать, что все буквы из G , входящие в слово w , различны. Пусть $g_1 < g_2 < \dots < g_m$ — произвольные буквы из G . Рассмотрим набор из $|\lambda|$ букв $\Omega = (\{x_i\}, \{y_j\}, g_1, \dots, g_m)$, в который буквы x_i входят n_i раз, а буквы y_j — n'_j раз. Будем заполнять клетки диаграммы λ буквами из Ω так, чтобы получалась \mathcal{A}_p -таблица.

По [49, Th.3] число таких заполнений не зависит от упорядочения p . Обозначим это число символом $d(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)$. Каждому заполнению в силу утверждения 1а) соответствует ровно $\dim \lambda$ слов w , составленных из набора букв Ω . Поэтому вероятность фиксированного заполнения диаграммы λ равна

$$\dim \lambda \prod_{i \geq 1} \alpha_i^{n_i} \prod_{j \geq 1} \beta_j^{n'_j} \frac{1}{m!},$$

где множитель $\frac{1}{m!}$ возникает из условия $g_1 < g_2 < \dots < g_m$. Следовательно, искомая величина выражается формулой, не зависящей от упорядочения p :

$$\begin{aligned} \mu_n(w \in \mathcal{A}^n : \phi_p(w) = \lambda; \text{type}(R(w)) = (\{n_i\}; \{n'_j\}; m)) = \\ \dim \lambda \frac{d(\{n_i\}; \{n'_j\}; m)}{m!} \prod_{i \geq 1} \alpha_i^{n_i} \prod_{j \geq 1} \beta_j^{n'_j}. \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Распределение величин $\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_i}(n)$, $\lambda_j^{\mathcal{P}}(n) - N_{y_j}(n)$ не зависит от порядка p .

Зафиксируем на \mathcal{A} порядок p и пусть I — интервал алфавита \mathcal{A} . Скажем, что алфавит \mathcal{A}^* является *укрупнением* алфавита \mathcal{A} , если интервал I заменяется одной новой буквой $z \in \mathcal{A}^*$ (остальные буквы не меняются). Будем считать, что $z \in L_e$ (вне зависимости от того, каким из множеств L_e, L_o, G принадлежали буквы из I), и сопоставим букве z вероятность, равную $\mu_1(I)$. В этом случае отображение ϕ_p^* можно естественным образом определить как

$$\phi_p^*: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{Y}_n,$$

то есть на том же вероятностном пространстве, что и отображение ϕ_p . В силу этого можно сравнивать длины строк случайных диаграмм Юнга, порождаемых \mathcal{A} и \mathcal{A}^* .

Лемма 1.2.2. *Для любого $k > 0$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^{\mathcal{P}}(n) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n)$$

Доказательство. Вследствие утверждения 1b), имеем:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^{\mathcal{P}}(n) = r_k(w);$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n) = r_k(w^*).$$

Заметим, что любая возрастающая (в смысле нашего определения) подпоследовательность слова w из \mathcal{A} переходит в возрастающую подпоследовательность соответствующего слова $w^* \in \mathcal{A}^*$, так как новая буква z принадлежит множеству L_e . Поэтому для любого w выполнено неравенство

$$r_k(w^*) \geq r_k(w).$$

□

Определим *транспонирующее* отображение, меняющее ролями строки и столбцы,

$$\phi_{p^t} : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathbb{Y}_n,$$

следующим образом. Рассмотрим на \mathcal{A} упорядочение, обратное p (будем обозначать его p^t), и будем считать, что:

$$L_e^t = L_o, \quad L_o^t = L_e.$$

Таким образом, параметры $\{\beta_j\}$ и $\{\alpha_i\}$ меняются местами; ϕ_{p^t} определяется обобщенным RSK-алгоритмом, примененным к порядку p^t и L_e^t, L_o^t, G . Будем обозначать λ^t диаграмму Юнга, транспонированную к λ .

Лемма 1.2.3.

$$\phi_p(w) = \phi_{p^t}(w)^t \text{ для почти всех } w.$$

Доказательство. Если все буквы из G , входящие в w , различны (это условие вызвано формальной несимметричностью отношений $x_1 \nearrow x_2$ и $x_1 \searrow x_2$), то легко видеть, что возрастающая последовательность букв относительно p и $L_e \cup L_o$ — это убывающая последовательность относительно $p^t, L_e^t \cup L_o^t$. Таким образом, лемма следует из утверждения 1b). □

1.2.3

Пусть $q_1, q_2, q_3 \geq 0$, $q_1 < q_3$ и $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Рассмотрим случайное блуждание частицы по множеству $\{0, 1, 2, \dots\}$, в котором шаг вправо делается с вероятностью q_1 , а шаг влево — с вероятностью q_3 , за исключением точки 0. Вначале частица находится в 0. Обозначим символом $\Psi_{q_3, q_1}(n)$ положение частицы после n -ого шага. Иначе говоря, $\Psi_{q_3, q_1}(n)$ — марковская цепь с переходной матрицей

$$D = \begin{pmatrix} q_3 + q_2 & q_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ q_3 & q_2 & q_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и начальным вектором $\vec{a}_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$.

Лемма 1.2.4. *Существует константа C , не зависящая от n , такая что*

$$\mathbf{E}\Psi_{q_3, q_1}(n) < C \quad \text{для любого } n$$

Доказательство. Определим вектор \vec{a} формулой

$$\vec{a} = \left(2, 2 \left(\frac{q_1}{q_3} \right), 2 \left(\frac{q_1}{q_3} \right)^2, \dots \right)$$

Легко видеть, что $\vec{a}D = \vec{a}$. Кроме того, вектор \vec{a} покомпонентно больше, чем начальный вектор этой марковской цепи $\vec{a}_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$. Из неотрицательности элементов матрицы D следует, что и $\vec{a}D^n$ будет покомпонентно больше, чем \vec{a}_0D^n для любого n . Но $\vec{a}D^n = \vec{a}$, поэтому $\mathbf{E}\Psi_{q_3, q_1}(n)$ для любого n будет ограничено числом

$$2 \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{q_1}{q_3} \right)^i$$

□

1.2.4

Зафиксируем порядок на \mathcal{A} . Пусть буквы $a, b \in L_e$, $a < b$, образуют интервал относительно этого порядка (т.е. a и b — соседние буквы) и $w \in \mathcal{A}^n$ — слово, подаваемое

на вход RSK-алгоритма. Обозначим символом $w_{a,b}$ слово, полученное из w вычеркиванием всех букв, кроме a и b .

Назовем *возможным преобразованием* слова $w_{a,b}$ слово (обозначим его символом $d_w(w_{a,b})$), в которое записывается тот порядок букв a и b , в котором они выбиваются из первой строчки в процессе действия обобщенного RSK-алгоритма на слове w ; если какие-то буквы остались не выбитыми из первой строчки, то допишем их в конец слова $d_w(w_{a,b})$ в том порядке, в котором они стоят в первой строчке.

Будем называть суффиксом слова $w = z_1 z_2 \dots z_n$ любое слово вида $z_k z_{k+1} z_{k+2} \dots z_n$. Для всех суффиксов (включая пустой) слова $w_{a,b}$ определим разность числа букв b и числа букв a , входящих в них. Максимальную из этих разностей назовем *результатом* и обозначим символом $\rho(w_{a,b})$, а любой суффикс, на котором она достигается, будем называть *максимальным*.

Легко видеть, что если применять RSK-алгоритм непосредственно к слову $w_{a,b}$, то в первой строчке останутся не выбитыми ровно $\rho(w_{a,b})$ букв b .

Пример. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 \in L_e$ и $w = x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_2 x_3 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2$. Тогда $w_{x_2 x_3} = x_2 x_3 x_2 x_2 x_3 x_3 x_2 x_3 x_3 x_2$, максимальный суффикс w_{x_2, x_3} состоит из 6 последних букв и $\rho(w_{x_2, x_3}) = 2$. При этом выполнено

$$d_w(w_{x_2, x_3}) = x_2 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 x_2 x_2 x_3 x_3.$$

Лемма 1.2.5.

$$\rho(d_w(w_{a,b})) \leq \rho(w_{a,b})$$

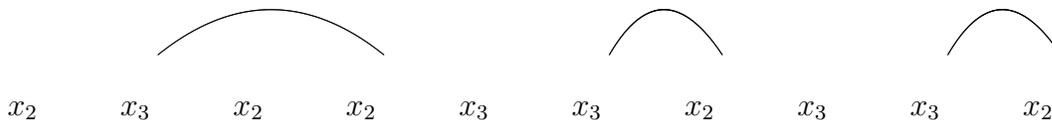
для любого w .

Доказательство. Шаг 1

Будем образовывать пары букв из слова $w_{a,b}$. В каждой паре будет одна буква b и одна буква a , причем буква a будет стоять в слове $w_{a,b}$ правее, чем буква b из этой пары. Составим эти пары следующим образом: первой возьмём самую правую букву a и поставим ей в соответствие ближайшую к ней слева букву b . Затем возьмём самую правую из ещё не выбранных букв a и поставим ей в пару самую ближнюю к ней слева букву b из числа ещё не выбранных. Прделаем эту процедуру максимально

возможное число раз. Буквы b , не вошедшие в пары, будем называть черными, а вошедшие — белыми.

Для слова w_{x_2, x_3} из примера (см. выше) разбиение на пары будет выглядеть следующим образом:



Шаг 2

Докажем, что ровно $\rho(w_{a,b})$ букв b не вошло в пары. Действительно, пусть число черных букв равно ρ' . Рассмотрим суффикс, начинающийся с самой левой из черных букв. Каждая буква a из этого суффикса должна быть сопоставлена с буквой b из этого же суффикса. Поэтому разность числа букв b и a для него равна ρ' . Значит, $\rho(w_{a,b}) \geq \rho'$. С другой стороны, в максимальном суффиксе должно быть как минимум $\rho(w_{a,b})$ черных букв. Поэтому $\rho' = \rho(w_{a,b})$.

Будем для удобства считать, что в ходе RSK-алгоритма выбивается сначала белая буква b , и только если такой нет — то черная. Понятно, что эта условность никак не влияет на ход алгоритма.

Шаг 3

Покажем, что в каждой паре буква b будет выбита раньше, чем соответствующая ей буква a . Будем доказывать это утверждение индукцией по числу пар. Рассмотрим самую левую пару. Буква b , входящая в нее, является первой белой буквой b в слове, поэтому буква a из этой пары обязана её выбить. Для k -ой слева пары рассуждение аналогично: в момент прихода буквы a из этой пары белые буквы b из предыдущих $k - 1$ пары уже выбиты (по предположению индукции), поэтому пришедшая буква a обязана выбить букву b именно из своей пары (если она не была выбита раньше, что также возможно). Поэтому порядок в паре будет тот же и после любого возможного преобразования строки $w_{a,b}$.

Следовательно, в результат слова $d_w(w_{a,b})$ могут дать положительный вклад лишь

чёрные буквы слова $w_{a,b}$, которых ровно $\rho(w_{a,b})$. Поэтому результат слова не увеличивается после возможного преобразования. \square

1.3 Доказательства теорем

1.3.1 Доказательство теоремы 2 для конечного \mathcal{A}

Докажем теорему 2 для частного случая, а именно: предположим, что среди α - и β -параметров имеется лишь конечное число ненулевых и что $\gamma = 0$. В этом случае теорему достаточно доказать для случая, когда K равно числу всех ненулевых α -параметров, а L равно числу всех ненулевых β -параметров. Таким образом, алфавит $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_K\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_L\}$.

В силу следствия из леммы 1, утверждения теоремы достаточно доказать для какого-то одного порядка. Упорядочим алфавит \mathcal{A} следующим образом:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_K < y_L < y_{L-1} < \dots < y_2 < y_1.$$

Будем применять к случайному слову $w \in \mathcal{A}^n$ обобщенный RSK-алгоритм. Обозначим символом $\xi_j^i(n)$ число букв x_j в i -ой строчке получающейся \mathcal{A} -таблицы. Легко видеть, что при введенном порядке $\xi_j^i(n) = 0$, если $i > j$.

Последовательность случайных величин $\{\psi(n)\}$ назовём L -ограниченной, если существует константа C , не зависящая от n и такая, что

$$\mathbf{E}|\psi(n)| < C \quad \text{для любого } n$$

Будем обозначать любые последовательности L -ограниченных случайных величин символом $\{L(n)\}$. Заметим, что выполнены соотношения

$$\{L(n)\} + \{L(n)\} = \{L(n)\}, \quad \{L(n)\} - \{L(n)\} = \{L(n)\}.$$

Сначала докажем утверждение теоремы для строк. Будем вести индукцию по строкам.

1) Первая строка

Оценка снизу. Заметим, что все буквы x_1 стоят в первой строке. Поэтому

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_1}(n).$$

Оценка сверху. Посмотрим, по каким правилам меняется число $\xi_k^1(n)$ при $k \geq 2$. Увеличиваться оно может только в случае появления буквы x_k , что происходит с вероятностью α_k . Если же появляется x_{k-1} , что происходит с вероятностью $\alpha_{k-1} > \alpha_k$, и $\xi_k^1 \neq 0$, то ξ_k^1 обязано уменьшиться на 1. В силу леммы 4, это означает, что последовательность $\xi_k^1(n)$ L-ограничена. Из определения \mathcal{A} -таблицы следует, что в каждой строке не больше одной буквы y_j . Поэтому

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) = N_{x_1}(n) + \{L(n)\}$$

2) Зафиксируем $l \leq K$. Пусть утверждение теоремы верно для первых $l-1$ строк. Докажем его для l -ой.

Оценка снизу. Буква x_l не может попасть ниже l -ой строки. С другой стороны, по уже доказанному, выше l -ой строки может быть лишь L-ограниченное количество букв x_l . Поэтому

$$\lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_l}(n) - \{L(n)\}.$$

Оценка сверху. Обозначим символом w^0 слово на входе обобщенного RSK-алгоритма, и символами w^1, w^2, \dots — слова, в которые записываются буквы в том порядке, в котором они выбиваются из первой, второй, ... строчек.

Докажем L-ограниченность величины $\xi_k^l(n)$ при $k > l$. Заметим, что w_{x_{k-1}, x_k}^{i-1} — это последовательность букв x_{k-1} и x_k поступающих в i -ую строку, а w_{x_{k-1}, x_k}^i — последовательность букв x_{k-1} и x_k выбиваемых из i -ой строки. Поэтому слово w_{x_{k-1}, x_k}^i является возможным преобразованием слова w_{x_{k-1}, x_k}^{i-1} , из которого вычеркнуты те буквы x_{k-1} и x_k , которые остались не выбитыми из i -ой строки. Но таких букв, по предположению индукции, L-ограниченное число. Поэтому из леммы 5 следует, что:

$$\rho(w_{x_{k-1}, x_k}^i) \leq \rho(w_{x_{k-1}, x_k}^{i-1}) + \{L(n)\}, \quad i = 1 \dots l-1. \quad (1.3.1)$$

Суммируя неравенства (1.3.1) по $i = 1 \dots l - 1$, получаем

$$\rho(w_{x_{k-1}, x_k}^{l-1}) \leq \rho(w_{x_{k-1}, x_k}^0) + \{L(n)\}.$$

Кроме того,

$$\rho(w_{x_{k-1}, x_k}^0) = \{L(n)\}$$

в силу леммы 4. Рассуждая так же, как при доказательстве оценки сверху для первой строчки, приходим к неравенству

$$\xi_k^l(n) \leq \rho(w_{x_{k-1}, x_k}^{l-1}).$$

Следовательно, $\xi_k^l(n)$ — L -ограниченная величина для любого $k > l$. Как уже было замечено, в каждой строчке не может быть больше одной буквы y_j (для каждого j). Значит,

$$\lambda_l^{\mathcal{P}}(n) = N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Для оценки величин $\lambda_1^{\mathcal{P}}(n), \dots, \lambda_L^{\mathcal{P}}(n)$ рассмотрим транспонирующее отображение. К мере, задаваемой параметрами $\mathcal{P}^t = (\{\beta_j\}, \{\alpha_i\}, \gamma)$, мы можем применить уже доказанные оценки для строчек. В силу леммы 3, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mathcal{P}}(n) &= \lambda_1^{\mathcal{P}^t}(n) = N_{y_1}(n) + \{L(n)\}, \\ &\vdots \\ \lambda_L^{\mathcal{P}}(n) &= \lambda_L^{\mathcal{P}^t}(n) = N_{y_L}(n) + \{L(n)\}. \end{aligned}$$

1.3.2 Доказательство теоремы 2 для общего случая

Пусть $\mathcal{P} = (\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \gamma)$ — параметры, удовлетворяющие условию строгой монотонности (1.1.1). Докажем сначала теорему для длин строк — утверждение для столбцов получится отсюда с помощью транспонирующего отображения.

В силу следствия из леммы 1, оценки сверху и снизу на величину $\mathbf{E}(\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) - N_{x_i}(n))$ можно доказывать для различных упорядочений алфавита \mathcal{A} . Введем порядок p_1 на \mathcal{A} :

$$x_1 < x_2 < \dots < y_1 < y_2 < \dots < G.$$

Оценка снизу. Для порядка p_1 буквы x_1, x_2, \dots, x_K эволюционируют вне зависимости от других букв, поэтому оценка

$$\lambda_i^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_i}(n) + \{L(n)\} \quad i = 1 \dots K$$

доказывается аналогично случаю конечного \mathcal{A} .

Идея доказательства оценки сверху состоит в сведении общего случая к случаю конечного числа параметров с помощью операции укрупнения. Порядок p_2 , используемый для оценки сверху, определим так, чтобы были возможны операции укрупнения, предписанные нижеследующими шагами (то есть буквы, которые будет нужно отождествить, должны образовывать интервалы относительно порядка p_2). Нашей целью является получение после нескольких укрупнений конечного числа параметров, причём K первых по величине α -параметров не должны измениться и все α -параметры должны быть различны.

1) Пусть число α -параметров в \mathcal{P} бесконечно. Рассмотрим два случая:

а) Допустим, существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=l+1}^{\infty} \alpha_i < \alpha_K$$

и для любого $r \leq l$ верно:

$$\sum_{i=l+1}^{\infty} \alpha_i \neq \alpha_r$$

В этом случае отождествим буквы $x_{l+1}, x_{l+2}, x_{l+3} \dots$

б) Если такого l , как требуется в пункте а), не существует, то, как легко видеть, найдутся $l_1, m_1 \in \mathbb{N}$ такие, что для некоторого $r \leq l_1$ верно:

$$\sum_{i=l_1+1}^{\infty} \alpha_i = \alpha_r < \alpha_K$$

и выполняются условия

$$\alpha_r > \sum_{i=l_1+1}^{l_1+m_1} \alpha_i > \alpha_{r+1},$$

$$\sum_{i=l_1+m_1+1}^{\infty} \alpha_i < \alpha_{l_1}.$$

В этом случае отождествим буквы $x_{l_1+1}, \dots, x_{l_1+m_1}$, а также (отдельно) $x_{l_1+m_1+1}, x_{l_1+m_1+2}, x_{l_1+m_1+3} \dots$

После проведенных операций укрупнения остается конечное число попарно различных α -параметров. Обозначим минимальное из них символом α_R .

2) Если число β -параметров бесконечно, то выберем l_2 так, чтобы было выполнено условие

$$\sum_{i=l_2+1}^{\infty} \beta_i < \alpha_R, \quad (1.3.2)$$

и отождествим буквы $y_{l_2+1}, y_{l_2+2}, y_{l_2+3} \dots$. Напомним, что после такой операции укрупнения возникает новый α -параметр, который в силу (1.3.2) меньше других α -параметров. Обозначим его символом α_{R+1} .

3) Если $\gamma > 0$, то легко видеть, что найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_m \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m &= 0, \\ \frac{\gamma}{m} + \delta_1 &< \alpha_{R+1}, \\ \frac{\gamma}{m} + \delta_m &> 0. \end{aligned}$$

Разобьём G на непересекающиеся интервалы длины $\frac{\gamma}{m} + \delta_1, \frac{\gamma}{m} + \delta_2, \dots, \frac{\gamma}{m} + \delta_m$ и отождествим точки в каждом из этих интервалов. В результате такой операции укрупнения возникнет m новых α -параметров, а из выбора δ_i следует, что эти параметры будут попарно различны и меньше всех полученных на предыдущих шагах.

Таким образом, каждый набор параметров \mathcal{P} можно операциями укрупнения, описанными в 1)-3), свести к случаю конечного числа параметров, при этом K первых по величине α -параметров не меняются. Обозначим полученный набор параметров

символом \mathcal{P}^* . Напомним, что величины $\lambda_i^{\mathcal{P}^*}(n)$ естественным образом определены на (\mathcal{A}^n, μ_n) .

Оценка сверху.

1) Первая строка.

По лемме 2

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \leq \lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n).$$

Так как \mathcal{P}^* соответствует случаю конечного алфавита, то по уже доказанному

$$\lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) \leq N_{x_1}(n) + \{L(n)\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) \leq N_{x_1}(n) + \{L(n)\}.$$

2) Докажем утверждение для l -ой строки. По лемме 2

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \leq \lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}^*}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}^*}(n).$$

Из уже доказанного в 3.1 имеем

$$\lambda_1^{\mathcal{P}^*}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}^*}(n) + \dots + \lambda_l^{\mathcal{P}^*}(n) \leq N_{x_1}(n) + \dots + N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Из оценки снизу получаем

$$\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) + \lambda_2^{\mathcal{P}}(n) + \dots + \lambda_{l-1}^{\mathcal{P}}(n) \geq N_{x_1}(n) + \dots + N_{x_{l-1}}(n) + \{L(n)\}.$$

Следовательно,

$$\lambda_l^{\mathcal{P}}(n) \leq N_{x_l}(n) + \{L(n)\}.$$

Доказательство утверждения теоремы для длин столбцов следует из утверждения для строк аналогично случаю конечного алфавита, что заканчивает доказательство теоремы 2.

1.3.3 Доказательство теоремы 1

Простым вычислением характеристических функций можно показать, что

$$\eta_n := \left(\frac{N_{x_1}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{N_{x_2}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{x_K}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \right. \\ \left. \frac{N_{y_1}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{y_L}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{Law} \eta,$$

где символом η обозначена многомерная гауссова случайная величина с нулевым средним и матрицей ковариаций C , задаваемой формулой

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_3 & \dots & -\alpha_1\alpha_K & -\alpha_1\beta_1 & \dots & -\alpha_1\beta_L \\ -\alpha_2\alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 & \dots & -\alpha_2\alpha_K & -\alpha_2\beta_1 & \dots & -\alpha_2\beta_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_K\alpha_1 & -\alpha_K\alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_K - \alpha_K^2 & -\alpha_K\beta_1 & \dots & -\alpha_K\beta_L \\ -\beta_1\alpha_1 & -\beta_1\alpha_2 & \dots & \dots & -\beta_1\alpha_K & \beta_1 - \beta_1^2 & \dots & -\beta_1\beta_L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_L\alpha_1 & -\beta_L\alpha_2 & \dots & \dots & -\beta_L\alpha_K & -\beta_L\beta_L & \dots & \beta_L - \beta_L^2 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что вектор

$$\psi_n := \frac{(\{L(n)\}, \{L(n)\}, \dots, \{L(n)\})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{prob} 0$$

для произвольных L -ограниченных последовательностей случайных величин (обозначенных как $\{L(n)\}$). Хорошо известно (см., например, [7, Th 3.1]), что из $\eta_n^0 \xrightarrow{Law} \eta^0$ и $\psi_n^0 \xrightarrow{prob} 0$ следует, что

$$\eta_n^0 + \psi_n^0 \xrightarrow{Law} \eta^0$$

Поэтому

$$\left(\frac{\lambda_1^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_1 n}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_2 n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\lambda_K^{\mathcal{P}}(n) - \alpha_K n}{\sqrt{n}}, \right. \\ \left. \frac{\lambda_1^{\prime\mathcal{P}}(n) - \beta_1 n}{\sqrt{n}} \dots \frac{\lambda_L^{\prime\mathcal{P}}(n) - \beta_L n}{\sqrt{n}} \right) = \eta_n + \psi_n \xrightarrow{Law} \eta$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Глава 2

Центральная предельная теорема для планшерелевских представлений бесконечномерной унитарной группы

2.1 Введение к главе 2

Асимптотический анализ мер на разбиениях, возникающих из теории представлений, является хорошо известным и распространенным объектом для исследований. Он важен для самой теории представлений (см. [17] и ссылки в ней) и тесно взаимосвязан с теорией случайных матриц, системами взаимодействующих частиц, перечислительной комбинаторикой и другими областями, для которых он часто предоставляет ключевые технические средства (см., например, [44], [48]).

Обычно такие меры возникают следующим образом. Пусть у нас есть группа с хорошо известным набором неприводимых представлений, которые могут быть параметризованы разбиениями или схожими объектами. Тогда разложение какого-либо естественного приводимого представления этой группы на неприводимые компоненты дает разложение общей размерности представления на размерности изотипических компонент; отношение соответствующей размерности и размерности всего пространства и будет весом меры. Данная процедура корректно определена не только

для конечномерных представлений, но и для бесконечномерных с конечным следом; вес (параметра) изотипической компоненты определяется в этом случае как след проектора на нее, при условии, что след нормализован так, что его значение на тождественном операторе равно 1.

Альтернативный подход к подобным мерам состоит в определении средних по этим мерам на подходящих наборах функций на множестве параметров неприводимых представлений. Эти средние возникают как следы операторов во всем пространстве представления, являющихся скалярными в каждой изотипической компоненте. В свою очередь, эти операторы являются образами центральных элементов групповой алгебры в случае, если группа конечна, и универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли в случае, если рассматривается группа Ли. Эти центральные элементы образуют коммутативную подалгебру, которая отображается в алгебру функций на параметрах, т.е. на разбиениях или схожих объектах. Значение функции, соответствующей центральному элементу, на параметре представления равняется (скалярному) значению этого элемента на этом неприводимом представлении.

С точки зрения теории вероятностей, данный подход выглядит полностью удовлетворительным. Однако, с точки зрения теории представлений, не ясно, почему мы можем рассматривать лишь коммутативные подалгебры, в то время как основной интерес теории представлений заключается в некоммутативных эффектах.

Цель данной работы — продвинуться дальше этого коммутативного ограничения.

Более подробно, для некоторого представления бесконечномерной унитарной группы с конечным следом, описанного ниже, мы рассматриваем семейство коммутативных подалгебр универсальной обертывающей алгебры, таких что элементы различных подалгебр, вообще говоря, не коммутируют. Далее, мы рассматриваем предельный режим, для которого известно (см. [11]), что меры, отвечающие каждой из подалгебр, аппроксимируются двумерными гауссовскими свободными полями (GFF — Gaussian Free Field). Мы изучаем “совместное распределение” этих GFF, чтобы это ни могло значить.

Для любого элемента универсальной обертывающей алгебры можно определить

его “среднее” как след его образа в представлении. Поэтому, при заданном представлении, можно определить “средние” для произвольных произведений элементов из наших подалгебр, несмотря на то, что они не коммутируют.

Наш основной результат заключается в том, что для некоторых *планшерелевских* представлений эти “средние” сходятся к настоящим средним соответствующих наблюдаемых гауссовского процесса, состоящего из семейства коррелированных GFF. Поэтому изначальное отсутствие коммутативности исчезает, но предельные гауссовские свободные поля, возникающие из различных подалгебр, не становятся независимыми.

Этот же предельный объект (набор коррелированных гауссовских свободных полей) был ранее получен как универсальный глобальный предел для флуктуаций собственных значений различных подматриц вигнеровской эрмитовой случайной матрицы, см. [8]. Можно предполагать, что этот процесс возникнет и для других, не планшерелевских фактор-представлений бесконечномерной унитарной группы при соответствующих предельных режимах.

2.2 Предварительные сведения

2.2.1 Бесконечномерная унитарная группа и её характеры

Пусть $U(N) = \{(u_{ij})_{i,j=1}^N\}$ — группа унитарных матриц N -ого порядка. Определим цепочку вложенных групп

$$U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(N) \subset U(N+1) \subset \dots,$$

в которой вложение $U(k) \subset U(k+1)$ определяется равенствами $u_{i,k+1} = u_{k+1,i} = 0$, $1 \leq i \leq k$, $u_{k+1,k+1} = 1$. *Бесконечномерной унитарной группой* называется объединение этой цепочки групп

$$U(\infty) = \bigcup_{N=1}^{\infty} U(N).$$

Характером группы $U(\infty)$ называется функция $\chi : U(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $\chi(e) = 1$, где e — единица группы $U(\infty)$ (нормированность);
- 2) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$, где h, g — произвольные элементы $U(\infty)$ (центральность);
- 3) матрица $[\chi(g_i g_j^{-1})]_{i,j=1}^n$ эрмитова и неотрицательно определена для любых $g_1, \dots, g_n \in U(\infty)$ (положительная определенность);
- 4) ограничение χ на $U(N)$ является непрерывной функцией для каждого N (непрерывность).

Легко видеть, что множество всех характеров группы $U(\infty)$ выпукло. Экстремальные точки этого множества будем называть *экстремальными* характерами.

Классификация экстремальных характеров дается теоремой, обычно называемой теоремой Эдrei-Войкулеску (см. [57], [21], [53], [46], [14]). Оказывается, что экстремальные характеры могут быть параметризованы множеством $\Omega = (\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-, \delta^+, \delta^-)$, где

$$\begin{aligned} \alpha^\pm &= \alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0, \\ \beta^\pm &= \beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0, \\ \delta^\pm &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) \leq \delta^\pm, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1. \end{aligned}$$

Вместо параметров δ^\pm бывает удобно использовать параметры γ^\pm , определяемые формулой

$$\gamma^\pm := \delta^\pm - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm).$$

Для каждого $\omega \in \Omega$ определим функцию $f_0^\omega : \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$f_0^\omega(u) = \exp(\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)) \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 + \beta_i^+(u-1))(1 + \beta_i^-(u^{-1}-1))}{(1 - \alpha_i^+(u-1))(1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1))},$$

и пусть

$$\chi^\omega(U) = \prod_{u \in \text{Spectrum}(U)} f_0^\omega(u), \quad U \in U(\infty).$$

Тогда функция χ^ω является экстремальным характером группы $U(\infty)$, отвечающим $\omega \in \Omega$.

Сигнатурой (также называемой *старшим весом*) длины N называется невозрастающая последовательность из N целых чисел

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N), \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Хорошо известно, что неприводимые комплексные представления группы $U(N)$ параметризуются сигнатурами длины N (см., например, [58], [59]). Пусть $\text{Dim}_N(\lambda)$ — размерность неприводимого представления, параметризованного сигнатурой λ . Обозначим символом χ^λ неприводимый нормированный характер группы $U(N)$ (т.е. функцию на группе, равную следу соответствующего оператора деленному на $\text{Dim}_N(\lambda)$), отвечающий представлению, параметризованному сигнатурой λ .

Сопоставим сигнатуре λ две диаграммы Юнга (λ^+, λ^-) так, что λ^+ задается неотрицательными λ_i , а λ^- — отрицательными λ_i , то есть

$$\lambda = (\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, -\lambda_2^-, -\lambda_1^-).$$

Для диаграммы Юнга μ пусть $|\mu|$ — число клеток в μ , и пусть $d(\mu)$ — число клеток на диагонали диаграммы μ . Пусть $d(\lambda^+) = d^+$ и $d(\lambda^-) = d^-$. Определим модифицированные координаты Фробениуса диаграммы Юнга $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ по формуле

$$a_i = \mu_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i = \mu'_i - i + \frac{1}{2}, \quad 1 \leq i \leq d(\mu), \quad (2.2.1)$$

где μ' обозначает диаграмму, транспонированную к μ .

Пусть для каждого N даны функции $f_N : U(N) \rightarrow \mathbb{C}$, и функция $f : U(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Будем говорить, что последовательность $\{f_N\}$ *аппроксимирует* функцию f , если для любого фиксированного $N_0 \in \mathbb{N}$ ограничения функций f_N на $U(N_0)$ равномерно сходятся к ограничениям функции f на $U(N_0)$.

Оказывается, экстремальные характеры $U(\infty)$ могут быть аппроксимированы нормированными неприводимыми характерами групп $U(N)$.

Теорема 2.2.1. Пусть χ^ω — экстремальный характер $U(\infty)$, отвечающий точке $\omega = (\alpha^\pm, \beta^\pm, \delta^\pm) \in \Omega$. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур длины N , причем координаты Фробениуса диаграмм Юнга λ^\pm равны $a_i^\pm(N)$, $b_i^\pm(N)$. Тогда нормированные характеры $\chi^{\lambda(N)}$ аппроксимируют χ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_i^\pm(N)}{N} = \alpha_i^\pm, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_i^\pm(N)}{N} = \beta_i^\pm, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\lambda^\pm(N)|}{N} = \delta^\pm.$$

Доказательство. Это теорема Вершика-Керова (см. [53]). Подробное доказательство изложено в [46] и в [14]. □

2.2.2 Граф Гельфанда-Цетлина и когерентные системы мер

Пусть \mathbb{GT}_N — множество всех сигнатур длины N . Удобно также определить \mathbb{GT}_0 как множество, состоящее из единственного элемента \emptyset . Будем говорить, что сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N-1}$ перемежаются и писать $\mu \prec \lambda$, если выполнено условие $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$ для всех $1 \leq i \leq N-1$. Также будем считать, что $\emptyset \prec \lambda$ для любого $\lambda \in \mathbb{GT}_1$, и $\mathbb{GT}_0 = \{\emptyset\}$.

Графом Гельфанда-Цетлина называется граф \mathbb{GT} , множеством вершин которого является $\bigcup_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$, а ребро проводится между двумя сигнатурами λ и μ тогда и только тогда, когда выполнено либо $\lambda \prec \mu$, либо $\mu \prec \lambda$. Путем между сигнатурами $\kappa \in \mathbb{GT}_K$ и $\nu \in \mathbb{GT}_N$, $K < N$, называется последовательность

$$\kappa = \lambda^{(K)} \prec \lambda^{(K+1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)} = \nu, \quad \lambda^{(i)} \in \mathbb{GT}_i.$$

Хорошо известно, что $\text{Dim}_N(\nu)$ равняется числу путей с началом в \emptyset и концом в $\nu \in \mathbb{GT}_N$. Бесконечным путем называется бесконечная последовательность

$$\emptyset \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \dots \prec \lambda^{(k)} \prec \lambda^{(k+1)} \prec \dots$$

Пусть \mathcal{P} — множество бесконечных путей. Введем на этом множестве топологию, индуцированную топологией прямого произведения $\prod_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$, и снабдим \mathcal{P} борелевской σ -алгеброй.

Пусть M_N — вероятностная мера на \mathbb{GT}_N . Назовем набор $\{M_N\}_{N=1}^\infty$ *когерентным семейством мер*, если для любого $N \geq 0$ и для любого $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено соотношение

$$M_N(\lambda) = \sum_{\nu: \lambda \prec \nu} M_{N+1}(\nu) \frac{\text{Dim}_N(\lambda)}{\text{Dim}_{N+1}(\nu)}.$$

По заданной когерентной системе мер $\{M_N\}_{N=1}^\infty$ определим меру цилиндрического множества, задаваемого фиксированными первыми N сигнатурами, формулой

$$P(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N)}) = \frac{M_N(\lambda^{(N)})}{\text{Dim}_N(\lambda^{(N)})}. \quad (2.2.2)$$

Заметим, что эта вероятность зависит только от сигнатуры длины N , и не зависит от $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}$. Из свойства когерентности следует, что так определенные меры цилиндров согласованы и определяют вероятностную меру на \mathcal{P} .

Пусть χ — произвольный характер группы $U(\infty)$. Рассмотрим разложение ограничения этого характера на группу $U(N)$ по характерам χ^λ

$$\chi|_{U(N)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} M_N(\lambda) \chi^\lambda. \quad (2.2.3)$$

Легко проверить, что коэффициенты разложения $M_N(\lambda)$ образуют когерентную систему мер на \mathbb{GT} , и, наоборот, по любой когерентной системе мер на \mathbb{GT} можно таким образом построить характер группы $U(\infty)$.

2.2.3 Вероятностная мера, отвечающая одностороннему планшерелевскому характеру

Пусть χ^{γ^+} — экстремальный характер группы $U(\infty)$, возникающий при параметрах $\alpha^{+,-} = 0$, $\beta^{+,-} = 0$, $\gamma^- = 0$ и ненулевом γ^+ . Этот характер из аналогии с классификацией характеров бесконечной симметрической группы естественно называть *односторонним планшерелевским*. Будем обозначать когерентную систему мер на \mathbb{GT} , отвечающую этому характеру, символом $\tilde{P}_N^{\gamma^+}$.

Пусть

$$P_L^\gamma(\lambda) := \tilde{P}_L^{\gamma^L}(\lambda), \quad L \in \mathbb{N},$$

где $\gamma > 0$ — фиксированная константа.

Пусть u_1, \dots, u_L — собственные значения матрицы $U \in U(L)$, и пусть $\dim \mu$ — размерность неприводимого представления группы $S(|\mu|)$, соответствующего $\mu \in \mathbb{Y}_{|\mu|}$, где \mathbb{Y}_n обозначает множество диаграмм Юнга с n клетками.

Для получения явной формулы для $P_L^\gamma(\lambda)$ следует, согласно (2.2.3), разложить функцию

$$f_0^{\gamma L}(u_1, \dots, u_L) = \exp \left(\gamma L \sum_{i=1}^L (u_i - 1) \right)$$

по неприводимым характерам группы $U(L)$, задаваемым, как известно (см., например, [58], [59], [24]), функциями

$$\chi^\lambda = \frac{s_\lambda(u_1, \dots, u_L)}{\text{Dim}_L \lambda},$$

где s_λ — функции Шура (см., например, [39]).

Запишем функцию $f_0^{\gamma L}(u_1, \dots, u_L)$ в виде

$$\exp \left(\gamma L \sum_{i=1}^L (u_i - 1) \right) = \exp(-\gamma L^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma L)^n p_1^n(u_1, \dots, u_L)}{n!},$$

где $p_1(u_1, \dots, u_L) := \sum_{i=1}^L u_i$. Воспользовавшись хорошо известной формулой (см. [39])

$$p_1^n(u_1, \dots, u_L) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_L(n)} \dim \lambda \cdot s_\lambda,$$

где $\mathbb{Y}_L(n)$ — множество диаграмм Юнга с n клетками и не более, чем L строками, получаем, что

$$P_L^\gamma(\lambda) = \begin{cases} e^{-\gamma L^2} \frac{(\gamma L)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_L}}{(\lambda_1 + \dots + \lambda_L)!} \dim \lambda \text{Dim}_L \lambda, & \text{если } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0; \\ 0, & \text{при других } \lambda. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Таким образом, мера P_L^γ сосредоточена на сигнатурах с неотрицательными координатами или, что то же самое, на диаграммах Юнга с не более, чем L строками.

Приведем другое семейство мер на диаграммах Юнга, впервые рассмотренное Бианом (см. [6]), очень близкое к семейству $\{P_L^\gamma\}$. Пусть N и n — два натуральных числа, и рассмотрим пространство $V = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$. Пусть $S(n)$ действует на V перестановкой компонент, а $U(N)$ действует естественным образом в каждом \mathbb{C}^N . Из двойственности Шура-Вейля следует, что определенное таким образом представление $S(n) \times U(N)$ имеет простой спектр, параметризованный диаграммами Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)$. При этом размерность неприводимой компоненты равняется $\dim \lambda \operatorname{Dim}_N \lambda$. Это служит мотивировкой для определения меры $M_{n,N}^{SW}(\lambda)$ по формуле

$$M_{n,N}^{SW}(\lambda) = \frac{\dim \lambda \operatorname{Dim}_N \lambda}{N^n}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N).$$

Рассмотрим теперь *пуассонизацию* этого семейства мер, получаемую заменой n на пуассоновскую величину с параметром ν и определяемую по формуле

$$M_{\nu,N}^{SWP}(\lambda) = e^{-\nu} \frac{\nu^{|\lambda|}}{|\lambda|!} M_{|\lambda|,N}^{SW}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Y}. \quad (2.2.5)$$

Из (2.2.4) и (2.2.5) следует, что

$$M_{[\gamma L^2],L}^{SWP}(\lambda) = P_L^\gamma(\lambda).$$

Пуассоновская величина с растущим параметром ν концентрируется вокруг ν , поэтому свойства мер $M_{n,N}^{SW}$ близки к свойствам мер P_L^γ при $L = N$ и $n = [\gamma L^2]$.

Как показано в [16], [27], [15], случайная диаграмма Юнга по мере P_L^γ задает случайный точечный процесс, являющийся ансамблем Шарлье (и, в частности, детерминантным процессом).

2.2.4 Известные результаты о планшерелевских вероятностных мерах

В этом разделе мы перечислим некоторые известные результаты о мерах $P_L^\gamma(\lambda)$ и $M_{[\gamma L^2],L}^{SW}(\lambda)$.

Будем изображать диаграмму Юнга повернутой так, чтобы её диагональ была вертикальна, и пусть $\lambda(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, соответствующая верхней границе диаграммы, с условием $\lambda(x) = |x|$ для достаточно больших $|x|$ (см. рисунок 2.1).

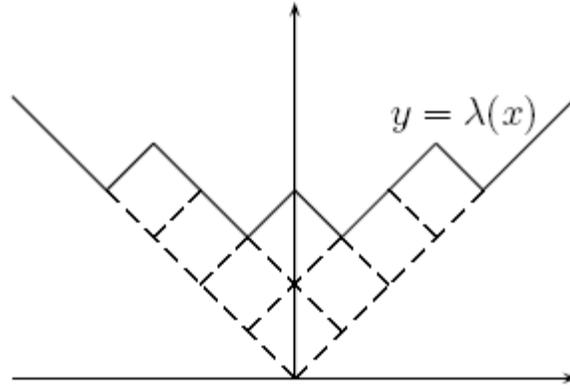


Рис. 2.1: Функция $\lambda(x)$, сопоставляемая диаграмме Юнга $\lambda = (4, 2, 1)$.

Пусть

$$\bar{\lambda}(x) := \frac{\lambda(xL)}{L}$$

— нормированная граница диаграммы Юнга. Пусть диаграмма $\lambda \in \mathbb{Y}_{[\gamma L^2]}$ выбирается случайно по мере $M_{[\gamma L^2], L}^{SW}$. В работе Биана (см. [6]) было показано, что при этом случайные функции $\bar{\lambda}(x)$ сходятся к (детерминированным) функциям $\lambda_\gamma(x)$ (см. строгое утверждение и формулы для $\lambda_\gamma(x)$ в [6]). Иначе говоря, случайные диаграммы имеют предельную форму (см. рисунок 2.2).

Пусть $q(\gamma)$ — самая левая невырожденная точка предельной формы $\lambda_\gamma(x)$ (см. рисунок 2.2). Оказывается, что

$$\left. \frac{d\lambda'_\gamma(x)}{dx} \right|_{x=q(\gamma)+0} = \begin{cases} +1, & \text{если } \gamma > 1; \\ 0, & \text{если } \gamma = 1; \\ -1, & \text{если } \gamma < 1. \end{cases}$$

В [15] было найдено локальное предельное поведение вблизи точки $q(1)$ в критическом случае $\gamma = 1$ для пуассонизированной меры P_L^1 .

После нахождения предельной формы следующим возможным вопросом является нахождение флуктуаций диаграмм относительно этой предельной формы. Первый

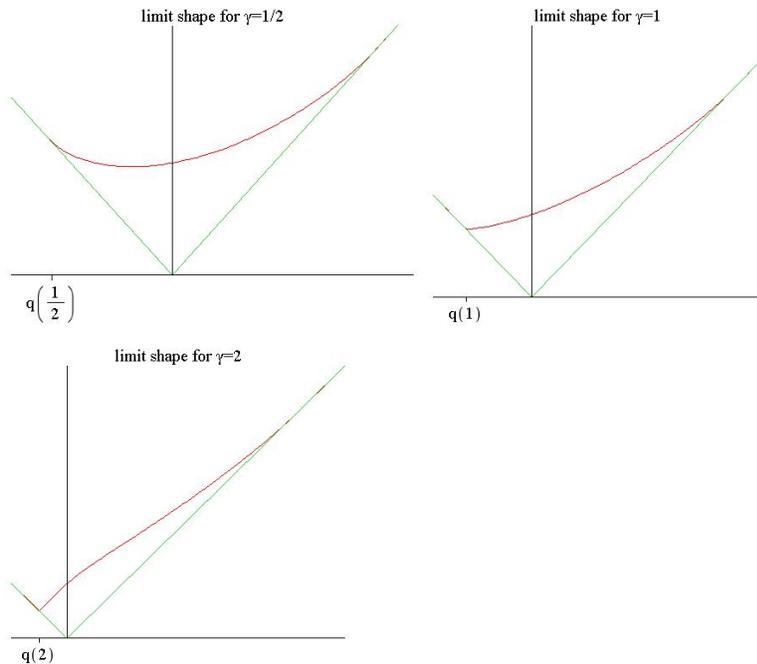


Рис. 2.2: Предельные формы для мер $P_L^\gamma(\lambda)$ и $M_{[\gamma L^2], L}^{SW}(\lambda)$

результат такого рода был получен в [29] (подробное доказательство см. в [26]) для меры Планшереля симметрической группы. Для мер $M_{[\gamma L^2], L}^{SW}$ теорема Керова была получена в [40]. Неформально говоря, она утверждает, что

$$\bar{\lambda}(x) = \lambda_\gamma(x) + \frac{2}{L} \Delta_\gamma(x), \quad L \rightarrow \infty,$$

где $\Delta_\gamma(x)$ — это некоторый обобщенный гауссовский процесс.

В работе [12] были найдены локальные корреляции в трех предельных режимах (синус, Эйри, Пирси) относительно более общего семейства мер, отвечающих *двустороннему планшерелевскому* характеру, возникающему при ненулевых параметрах γ^+ и γ^- . Кроме того, формулы из [12] позволяют предсказать предельную форму диаграмм Юнга λ^+ и λ^- для двустороннего планшерелевского характера.

В [43] было показано, что существует предел

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{-\ln \left(M_{[\gamma L^2], L}^{SW}(\lambda) \right)}{L},$$

где сходимость понимается в смысле сходимости по вероятности. Это утверждение является некоторым аналогом теоремы Шеннона-Макмиллана-Бреймана.

2.2.5 Случайная функция высоты и GFF

В этом разделе мы приведем необходимые определения и сформулируем некоторые результаты из [11].

Гауссовским семейством называется множество гауссовских величин $\{\xi_a\}_{a \in \Upsilon}$, проиндексированное произвольным множеством Υ . Будем считать, что все гауссовские величины центрированы, то есть выполнено условие

$$\mathbf{E}\xi_a = 0, \quad \text{для всех } a \in \Upsilon.$$

Гауссовское семейство задает *ковариационную функцию* $Cov : \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую формулой

$$Cov(a_1, a_2) = \mathbf{E}(\xi_{a_1}\xi_{a_2}).$$

Предположим, что некоторая функция $\tilde{C} : \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $n \geq 1$ и любых $a_1, \dots, a_n \in \Upsilon$, матрица $(\tilde{C}(a_i, a_j))_{i,j=1}^n$ симметрична и положительно определена. Тогда (см., например, [20]) существует центрированное гауссовское семейство с ковариационной функцией \tilde{C} .

Пусть $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ — верхняя комплексная полуплоскость. Пусть C_0^∞ — пространство гладких вещественных функций на \mathbb{H} с компактным носителем. Пусть

$$G(z, w) := -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|, \quad z, w \in \mathbb{H},$$

и определим функцию $C : C_0^\infty \times C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$C(f_1, f_2) := \int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{H}} f_1(z) f_2(w) G(z, w) dz d\bar{z} dw d\bar{w}.$$

Гауссовским свободным полем (GFF) \mathfrak{G} на \mathbb{H} с нулевым граничным условием называется гауссовское семейство $\{\xi_f\}_{f \in C_0^\infty}$ с ковариационной функцией C . Поле \mathfrak{G} не определено как случайная функция на \mathbb{H} ; однако, определены интегралы вида $\int_{\gamma} f(z) \mathfrak{G}(z) dz$, где γ — контур конечной длины в \mathbb{H} , а $f(z)$ — непрерывная функция на нем (см. [50]).

Определим *функцию высоты*

$$H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$$

по формуле

$$H(x, y, \{\lambda^{(n)}\}) = \sqrt{\pi} \left| \left\{ i \in \{1, 2, \dots, [y]\} : \lambda_i^{(y)} - i + \frac{1}{2} \geq x \right\} \right|,$$

где $\lambda_i^{(y)}$ — координаты сигнатуры длины $[y]$ из бесконечного пути. Снабдив \mathcal{P} вероятностной мерой μ_γ , мы получаем, что $H(x, y, \cdot) =: H(x, y)$ становятся случайными функциями, описывающими поведение некоторой случайной ступенчатой двумерной поверхности или случайных ромбовидных тайлингов на полуплоскости (см. [11]).

Введем функции $x(z), y(z) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$x(z) = \gamma(1 - 2\Re(z)), \quad y(z) = \gamma|z|^2.$$

“Перенесем” функцию $H(x, y)$ на \mathbb{H} — определим функцию

$$H^\Omega(z) = H(Lx(z), Ly(z)), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Известно, см. [6], [11], что существует предельная (не случайная) функция высоты

$$\tilde{h}(z) := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}H^\Omega(z)}{L}, \quad z \in \mathbb{H},$$

которая определяет предельную форму.

Флуктуации вокруг предельной формы изучались в [11], где было показано, что поле флуктуаций

$$\mathcal{H}(z) := H^\Omega(z) - \mathbf{E}H^\Omega(z), \quad z \in \mathbb{H}, \tag{2.2.6}$$

сходится к гауссовскому свободному полю, введенному выше.

В [11, Th. 1.3] была доказана следующая теорема:

Теорема 2.2.2. *Пусть $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{H}$ — различные точки комплексной полуплоскости. Тогда выполнено*

$$\mathbf{E}(\mathcal{H}(z_1) \dots \mathcal{H}(z_N)) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \mathcal{PM}} \prod_{j=1}^{l/2} G(z_{\sigma(2j-1)}, z_{\sigma(2j)}),$$

где \mathcal{PM} — множество инволюций $\{1, 2, \dots, N\}$ без неподвижных точек (в частности, $\mathcal{PM} = \emptyset$, если N — нечетно).

Также в [11, Th. 5.6, Th. 5.8] было доказано некоторое усиление этой теоремы, позволяющее усреднять подходящие тест-функции.

Сформулируем схожее утверждение, доказываемое в настоящей работе, использующее другое множество пробных функций.

Определим момент случайной функции высоты формулой

$$M_{y,k} := \int_{-\infty}^{\infty} x^k (H(Lx, Ly) - \mathbf{E}H(Lx, Ly)) dx.$$

Определим соответствующий ему момент гауссовского свободного поля формулой

$$\mathcal{M}_{y,k} = \int_{z \in \mathbb{H}; y = \gamma |z|^2} x(z)^k \mathfrak{G}(z) \frac{dx(z)}{dz} dz.$$

Предложение

2.2.1. При $L \rightarrow \infty$, набор случайных величин $\{M_{y,k}\}_{y>0, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходится, в смысле сходимости конечномерных распределений, к набору $\{\mathcal{M}_{y,k}\}_{y>0, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Это утверждение является частным случаем теоремы 2.3.1 (см. ниже).

2.2.6 Сходимость в смысле состояний

Пусть задано вероятностное пространство Ω и последовательность k -мерных случайных векторов $(\eta_n^1, \eta_n^2, \dots, \eta_n^k)$ на нем, сходящаяся (в смысле сходимости моментов), к гауссовскому случайному вектору (η^1, \dots, η^k) с нулевым средним. Определим *состояние* формулой

$$\langle \xi \rangle_{\Omega} := \mathbf{E}\xi, \quad \xi \in L^1(\Omega).$$

Тогда мы можем записать эту сходимость в виде

$$\langle \eta_n^{i_1} \eta_n^{i_2} \dots \eta_n^{i_l} \rangle_{\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \prod_{j=1}^{l/2} \langle \eta^{\sigma(2j-1)} \eta^{\sigma(2j)} \rangle_{\Omega},$$

$$\text{для любого } l \geq 1 \text{ и любых } (i_1, \dots, i_l) \in \{1, 2, \dots, k\}^l, \quad (2.2.7)$$

где \mathcal{PM} — множество инволюций $\{1, 2, \dots, l\}$ без неподвижных точек, также известных как *совершенные паросочетания* (в частности, \mathcal{PM} — пустое множество, если l —

нечетно). Действительно, по формуле Вика, в правой части (2.2.7) стоит выражение для моментов вектора η .

Пусть дана произвольная $*$ -алгебра \mathcal{A} и состояние $\langle \cdot \rangle$ (линейный функционал, неотрицательный на элементах вида aa^*) на ней. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathcal{A}$.

Предположим теперь, что элементы a_1, \dots, a_k и состояние на \mathcal{A} зависят от растущего параметра L , и пусть задана некоторая $*$ -алгебра \mathbf{A} , порождаемая элементами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, и состояние ϕ на ней. Будем говорить, что последовательность (a_1, \dots, a_k) сходится к $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ в смысле состояний, если

$$\langle a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_l} \rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{a}_{i_1} \dots \mathbf{a}_{i_l}), \quad (2.2.8)$$

причем это равенство выполняется для всех $l \in \mathbb{N}$ и наборов индексов $(i_1, i_2, \dots, i_l) \in \{1, 2, \dots, k\}^l$.

Будем говорить, что набор $\{a_i\}_{i \in \mathfrak{J}} \subset \mathcal{A}$, проиндексированный произвольным множеством \mathfrak{J} и зависящий от растущего параметра L , сходится в смысле состояний к набору $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in \mathfrak{J}} \subset \mathbf{A}$, если условие (2.2.8) выполняется для любого конечного набора элементов из $\{a_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ и соответствующих им элементов из $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$.

2.2.7 Алгебра сдвинуто-симметрических функций

В этом разделе мы приведем некоторые факты об алгебре сдвинуто-симметрических функций, см. [45], [34], [26].

Пусть x_1, x_2, \dots — переменные. Обозначим символом $\Lambda^*(n)$ алгебру полиномов от n переменных, симметричных по новым переменным

$$y_i := x_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем рассматривать фильтрацию $\Lambda^*(n)$, определяемую степенью полиномов. Пусть $\Lambda^*(n) \rightarrow \Lambda^*(n-1)$ — отображение, порождаемое специализацией $x_n = 0$. Алгеброй сдвинуто-симметричных функций Λ^* называется проективный предел $\Lambda^*(n)$ относительно этих отображений в категории фильтрованных алгебр.

Алгебра Λ^* порождается алгебраически независимым набором функций $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$, где

$$\mathbf{p}_k(x_1, x_2, \dots) := \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(x_i - i + \frac{1}{2} \right)^k - \left(-i + \frac{1}{2} \right)^k \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\rho, \lambda \in \mathbb{Y} := \mathbb{Y}_0 \cup \mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2 \cup \dots$, и пусть $r = |\rho|$ и $n = |\lambda|$. Для $r = n$ обозначим символом χ_ρ^λ значение характера представления симметрической группы $S(n)$, отвечающего разбиению λ , на классе сопряженности, отвечающему разбиению ρ . В случае $r < n$ будем обозначать символом χ_ρ^λ значение того же характера на классе сопряженности $\rho \cup 1^{n-r} = (\rho, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Y}_n$. Определим функцию $p_\rho^\# : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$p_\rho^\#(\lambda) = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-r+1) \frac{\chi_\rho^\lambda}{\dim \lambda}, & n \geq r; \\ 0, & n < r. \end{cases}$$

Оказывается, существует единственный элемент $\mathbf{p}_\rho^\# \in \Lambda^*$, который для всех $\lambda \in \mathbb{Y}$ принимает при $x_i = \lambda_i$ значение $p_\rho^\#(\lambda)$. Известно, что набор $\{\mathbf{p}_\rho^\#\}_{\rho \in \mathbb{Y}}$ образует линейный базис в алгебре Λ^* . При $\rho = (k)$, то есть если диаграмма Юнга ρ состоит лишь из одной строки длины k , будем обозначать элемент $\mathbf{p}_\rho^\#$ символом $\mathbf{p}_k^\#$. Известно, что набор $\{\mathbf{p}_k^\#\}_{k=1}^\infty$ составляет алгебраически независимую систему образующих в Λ^* .

Определим *вес* элемента $\mathbf{p}_\rho^\#$ по формуле

$$wt(\mathbf{p}_\rho^\#) = |\rho| + l(\rho),$$

и пусть $wt(f)$ для произвольного $f \in \Lambda^*$ определяется как максимальный из весов элементов $\mathbf{p}_\rho^\#$, входящих в линейное разложение f с ненулевым коэффициентом. Оказывается (см. [26]), что $wt(\cdot)$ задает фильтрацию на Λ^* , которую мы будем называть *весовой фильтрацией*.

Нам потребуется следующая формула перехода между системами образующих $\{\mathbf{p}_k\}$ и $\{\mathbf{p}_k^\#\}$ (см. [26, Prop 3.7]):

$$\mathbf{p}_k = \frac{1}{k+1} [u^{k+1}] \left\{ (1 + \mathbf{p}_1^\# u^2 + \mathbf{p}_2^\# u^3 + \dots)^{k+1} \right\} + \dots, \quad (2.2.9)$$

где точками обозначены члены веса не более k , а символ $[u^k]\{A(u)\}$ обозначает коэффициент при u^k у степенного ряда $A(u)$.

2.3 Формулировка результата

2.3.1 Характеры и состояния на универсальной обертывающей алгебре

В данном разделе мы рассмотрим другой, более общий, подход к асимптотическому анализу представлений $U(\infty)$.

Пусть I — произвольное конечное множество натуральных чисел. Пусть $U(I) = \{(u_{ij})_{i,j \in I}\}$ — группа унитарных матриц, составленных из элементов, индексы которых лежат в множестве I .

Пусть $\mathfrak{gl}(I) = \{(g_{ij})_{i,j \in I}\}$ — комплексифицированная алгебра Ли группы $U(I)$, являющаяся алгеброй всех матриц с элементами, проиндексированными множеством I . Пусть $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$ — универсальная обертывающая алгебра $\mathfrak{gl}(I)$, и $Z(\mathfrak{gl}(I))$ — ее центр. Обозначим символом

$$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty)) := \bigcup_{N \geq 1} \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\{1, 2, \dots, N\}))$$

универсальную обертывающую алгебру $\mathfrak{gl}(\infty)$.

Пусть $\mathcal{D}(I)$ — алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на $U(I)$ с комплексными коэффициентами. Хорошо известно (см., например, [59]), что существует канонический изоморфизм

$$D_I : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)) \rightarrow \mathcal{D}(I).$$

Пусть χ — произвольный характер группы $U(\infty)$ (см. раздел 2.2.1), и пусть $\{x_{ij}\}$ — матричные координаты.

Определим *состояние* на $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, задав его значение на любом элементе $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ формулой

$$\langle X \rangle_\chi = D_I(X) \chi(x_{ij})|_{x_{ij}=\delta_{ij}}, \quad X \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I)). \quad (2.3.1)$$

Заметим, что это определение согласовано для различных возможных выборов множества I . В конечномерной ситуации формула (2.3.1) дает (нормированный) след образа X в представлении, отвечающему характеру χ .

Оказывается, вычислению состояния элемента $X \in Z(\mathfrak{gl}(I))$ можно придать вероятностный смысл.

Пусть $Sign(I)$ — копия множества $\mathbb{GT}_{|I|}$, отвечающая I . Будем обозначать координаты сигнатур этого множества, параметризующих неприводимые представления группы $U(I)$, символами $\lambda_1^I, \lambda_2^I, \dots, \lambda_{|I|}^I$.

Аналогично разделу 2.2.2, ограничение характера χ на группу $U(I)$ и его разложение по нормированным неприводимым характеристам порождает вероятностную меру на множестве сигнатур $Sign(I)$.

Определим функции $p_{k,I} : Sign(I) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$p_{k,I} = \sum_{i=1}^{|I|} \left(\lambda_i^I - i + \frac{1}{2} \right)^k - \left(-i + \frac{1}{2} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathbb{A}(I)$ — алгебра функций, порожденная набором $p_{k,I}$. Хорошо известно, что функции $p_{k,I}$ при $k = 1, 2, \dots, |I|$ и фиксированном I алгебраически независимы и, таким образом, являются системой образующих алгебры $\mathbb{A}(I)$.

Известно (см. например, [45]), что существует канонический изоморфизм

$$Z(\mathfrak{gl}(I)) \rightarrow \mathbb{A}(I), \quad I \subset \mathbb{N}, \quad |I| < \infty.$$

Для любого центрального элемента значение отвечающей ему функции на сигнатуре равняется скалярному оператору, которым этот элемент становится на неприводимом представлении, параметризованном этой сигнатурой. Несложно убедиться, что значение состояния $\langle X \rangle_\chi$ для элемента $X \in Z(\mathfrak{gl}(I))$ равно математическому ожиданию соответствующей элементу X функции из $\mathbb{A}(I)$ по вероятностной мере на множестве сигнатур $Sign(I)$.

Мы будем отождествлять функции из алгебры $\mathbb{A}(I)$ и элементы центра $Z(\mathfrak{gl}(I))$ и использовать для них одни и те же обозначения.

Соответствие $p_{k,I} \rightarrow \mathbf{p}_k$ и каноническая проекция $\Lambda^* \rightarrow \Lambda^*(|I|)$ задает естественный изоморфизм между алгебрами $\mathbb{A}(I)$ и $\Lambda^*(|I|)$. Пусть $p_{\rho,I}^\#$ — функции (а также элементы $Z(\mathfrak{gl}(I))$), соответствующие $\mathbf{p}_\rho^\#$ относительно этого изоморфизма. Кроме того, этот изоморфизм определяет *весовую фильтрацию* на $\mathbb{A}(I)$.

Пусть $S(\mathfrak{gl}(I))$ — это симметрическая алгебра пространства $\mathfrak{gl}(I)$. Пусть $\Psi : S(\mathfrak{gl}(I)) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(I))$ — отображение специальной симметризации, см. статью [34].

Пусть $\{E_{ij}\}$ — базис $\mathfrak{gl}(\infty)$, составленный из матричных единиц, и пусть E_I — матрица, составленная из E_{ij} , $i, j \in I$.

Рассмотрим $p_{\rho, I}^{\#}$ как элементы $Z(\mathfrak{gl}(I))$. Оказывается (см. [34]), они могут быть записаны в виде

$$p_{\rho, I}^{\#} = \Psi \left(\operatorname{tr}(E_I^{k_1}) \operatorname{tr}(E_I^{k_2}) \dots \operatorname{tr}(E_I^{k_{l(\rho)}}) \right), \quad \rho = (k_1, k_2, \dots, k_{l(\rho)}),$$

где мы рассматриваем $\operatorname{tr}(E_I^{k_1}) \operatorname{tr}(E_I^{k_2}) \dots \operatorname{tr}(E_I^{k_{l(\rho)}})$ в качестве элемента $S(\mathfrak{gl}(I))$. Из этого следует (см. [34, уравнение (4)]), что для $I \subseteq J$ выполнено

$$D_J(p_{\rho, I}^{\#}) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in I; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in J} x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_k i_k} \partial_{\alpha_1 s(1)} \dots \partial_{\alpha_k i_{s(k)}}, \quad (2.3.2)$$

где $k = |\rho|$ и $s \in S(k)$ — произвольная перестановка с цикловой структурой ρ . В дальнейшем формула (2.3.2) будет ключевой для явных вычислений.

2.3.2 Состояние, отвечающее одностороннему планшерелевскому характеру

В данной статье нас будет интересовать односторонний планшерелевский характер с линейно растущим коэффициентом. Напомним, что этот характер задается формулой

$$\chi(U) = \exp \left(\gamma L \sum_{i=1}^{\infty} (x_{ii} - 1) \right), \quad (2.3.3)$$

где $U = [x_{ij}]_{i, j \geq 1}$, γ — фиксированное вещественное число, а L — растущий параметр.

Будем обозначать символом μ_{γ} вероятностную меру на пространстве путей \mathcal{P} , отвечающую этому характеру, а символом $\langle \cdot \rangle$ — соответствующее состояние на универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$.

Используя (2.3.1) и (2.3.2), легко вычислить состояние на элементах $p_{\rho, I}^{\#}$:

$$\langle p_{\rho, I}^{\#} \rangle = |I|^{l(\rho)} (\gamma L)^{|\rho|} = \gamma^{|\rho|} \left(\frac{|I|}{L} \right)^{|\rho|} L^{l(\rho) + |\rho|}. \quad (2.3.4)$$

Поскольку набор $\{p_{\rho, I}^{\#}\}$ является базисом $Z(\mathfrak{gl}(I))$, то из этого следует, что при $L \rightarrow \infty$ и $\frac{|I|}{L} \rightarrow \text{const} > 0$ выполнено

$$\langle f \rangle = O(L^{\text{wt}(f)}), \quad f \in Z(\mathfrak{gl}(I)). \quad (2.3.5)$$

Этот факт служит мотивировкой рассмотрения весовой фильтрации.

2.3.3 Основной результат

В этом разделе мы сформулируем основной результат данной работы.

Пусть $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ — произвольная последовательность попарно различных натуральных чисел. Пусть \mathcal{P}_A — копия пространства путей, отвечающая этой последовательности. По последовательности A определим *функцию высоты*

$$H_A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathcal{P}_A \rightarrow \mathbb{N}$$

по формуле

$$H_A(x, y, \{\lambda^{\{1, 2, \dots, n\}}\}) = \sqrt{\pi} \left| \left\{ i \in \{1, 2, \dots, [y]\} : \lambda_i^{\{a_1, \dots, a_{[y]}\}} - i + \frac{1}{2} \geq x \right\} \right|,$$

где $\lambda_i^{\{a_1, \dots, a_{[y]}\}}$ — координаты сигнатуры длины $[y]$ из бесконечного пути. Снабдив \mathcal{P}_A вероятностной мерой μ_γ , мы получим, что $H_A(x, y, \cdot) =: H_A(x, y)$ становятся случайными функциями на вероятностном пространстве $(\mathcal{P}_A, \mu_\gamma)$. Пока последовательность A используется лишь для маркировки вероятностного пространства; эти последовательности начнут играть роль когда мы будем рассматривать совместные распределения нескольких H_{A_i} ниже. В терминах $U(\infty)$, выбор последовательности A отвечает выбору башни

$$U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(\infty),$$

где $U(k) = U(\{a_1, a_2, \dots, a_k\})$ состоит из элементов $U(\infty)$, которые имеют нетривиальные матричные элементы в строках и столбцах с номерами из $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Ясно, что все такие башни сопряжены, и поэтому всякий характер $U(\infty)$ приводит к одной и той же функции высоты вне зависимости от выбора A .

Пусть $\{A_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ — семейство последовательностей попарно различных натуральных чисел, проиндексированное произвольным множеством \mathfrak{J} . Введем обозначения

$$A_i = \{a_{i,n}\}_{n \geq 1}, \quad A_{i,m} = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,m}\}.$$

Будем считать, что числа $a_{i,j} = a_{i,j}(L)$ зависят от растущего параметра L .

Назовем семейство $\{A_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ *регулярным*, если для любых $i, j \in \mathfrak{J}$ и любых $x, y > 0$ существует предел

$$\alpha(i, x; j, y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|A_{i,[xL]} \cap A_{j,[yL]}|}{L}. \quad (2.3.6)$$

Пример регулярного семейства. Пусть $\mathfrak{J} = \{1, 2, 3, 4\}$, и $a_{1,n} = n$, $a_{2,n} = 2n$, $a_{3,n} = 2n + 1$ и

$$a_{4,n} = \begin{cases} n + L, & n = 1, 2, \dots, L, \\ n - L, & n = L + 1, L + 2, \dots, 2L, \\ n, & n \geq 2L + 1. \end{cases}$$

Возьмем множество копий \mathbb{H} , проиндексированных множеством \mathfrak{J} , и рассмотрим их объединение

$$\mathbb{H}(\mathfrak{J}) := \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \mathbb{H}_i.$$

Определим функцию $C : \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \times \mathbb{H}(\mathfrak{J}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ по формуле

$$C_{ij}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\alpha(i, |z|^2; j, |w|^2) - zw}{\alpha(i, |z|^2; j, |w|^2) - z\bar{w}} \right|, \quad i, j \in \mathfrak{J}, z \in \mathbb{H}_i, w \in \mathbb{H}_j.$$

Предложение 2.3.1. *Для любого регулярного семейства последовательностей на $\mathbb{H}(\mathfrak{J})$ существует обобщенный гауссов процесс с ковариационным ядром $C_{ij}(z, w)$. Более подробно, для любого конечного семейства функций $f_m(z) \in C_0^\infty(\mathbb{H}_{i_m})$ и $i_1, \dots, i_M \in \mathfrak{J}$ матрица ковариаций*

$$\text{cov}(f_k, f_l) = \int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{H}} f_k(z) f_l(w) C_{i_k i_l}(z, w) dz d\bar{z} dw d\bar{w} \quad (2.3.7)$$

положительно определена.

Доказательство. См. [8, Предложение 1] . □

Обозначим полученный гауссов процесс символом $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i \in \mathfrak{J}}}$. Ограничение этого процесса на одну полуплоскость \mathbb{H}_i является гауссовским свободным полем, введенным выше, поскольку

$$C_{ii}(z, w) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|, \quad z, w \in \mathbb{H}_i, \quad i \in \mathfrak{J}.$$

Как и в параграфе 2.2.5, “перенесем” функцию $H_A(x, y)$ на \mathbb{H} — определим функцию

$$H_A^\Omega(z) = H_A(Lx(z), Ly(z)), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Как уже упоминалось (см. теорему 2.2.2), флуктуации

$$\mathcal{H}_i(z) := H_{A_i}^\Omega(z) - \mathbf{E}H_{A_i}^\Omega(z), \quad i \in \mathfrak{J}, \quad z \in \mathbb{H}_i, \quad (2.3.8)$$

при фиксированном i сходятся к гауссовскому свободному полю. Выбор последовательности A_i здесь не важен, так как подходящим сопряжением перестановочной матрицей задача сводится к случаю $A = \mathbb{N}$.

Основная цель данной работы заключается в изучении *совместных* флуктуаций (2.3.8) для различных i . Мы будем понимать совместные флуктуации величин \mathcal{H}_i следующим образом. Определим момент случайной функции высоты формулой

$$M_{i,y,k} := \int_{-\infty}^{\infty} x^k (H_{A_i}(Lx, Ly) - \mathbf{E}H_{A_i}(Lx, Ly)) dx. \quad (2.3.9)$$

Оказывается (см. (2.3.10) ниже), что функция $M_{i,y,k}$ принадлежит алгебре $\mathbb{A}(A_{i,[Ly]})$ и поэтому этой функции отвечает некоторый элемент из $Z(\mathfrak{gl}(A_{i,[Ly]}))$, см. раздел 2.3.1. Обозначим этот элемент также символом $M_{i,y,k}$. Отметим, что элементы $M_{i,y,k}$ при всех возможных значениях i, y, k лежат в одной объемлющей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ с определенным на ней состоянием $\langle \cdot \rangle$ (см. раздел 2.3.2). Поэтому мы можем говорить о сходимости этих элементов в смысле состояний (см. раздел 2.2.6). Нас интересует их предельное распределение при $L \rightarrow \infty$.

Мы доказываем, что совокупность $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ сходится к обобщенному гауссовскому процессу $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i \in \mathfrak{J}}}$. Определим соответствующие моменты процесса $\mathfrak{G}_{\{A_i\}_{i \in \mathfrak{J}}}$ формулой

$$\mathcal{M}_{i,y,k} = \int_{z \in \mathbb{H}; y = \gamma|z|^2} x(z)^k \mathfrak{G}_{A_i}(z) \frac{dx(z)}{dz} dz.$$

Теорема 2.3.1. *При $L \rightarrow \infty$, для любого регулярного семейства последовательностей \mathfrak{J} моменты $\{M_{i,y,k}\}_{i \in \mathfrak{J}, y > 0, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходятся в смысле состояний к моментам $\{\mathcal{M}_{i,y,k}\}_{i \in \mathfrak{J}, y > 0, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.*

Таким образом, в пределе при $L \rightarrow \infty$ некоммутативность подалгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, порожденной элементами $M_{i,y,k}$, исчезает (предельная алгебра \mathbf{A} оказывается коммутативной), однако случайные поля \mathcal{H}_i для различных индексов i не становятся независимыми.

Пусть $u = Lx$. По определению функции высоты

$$\frac{d}{du} H_{A_i}(u, [Ly]) = -\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^{[Ly]} \delta \left(u - \left(\lambda_s^{A_i, [Ly]} - s + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Напомним, что *сдвинутой степенной суммой* называется выражение

$$p_{k,I} = \sum_{i=1}^{|I|} \left(\left(\lambda_i^I - i + \frac{1}{2} \right)^k - \left(-i + \frac{1}{2} \right)^k \right), \quad I \subset \mathbb{N}.$$

Функции $p_{k,I} \in \mathbb{A}(I)$ и поэтому им соответствуют некоторые элементы из $Z(\mathfrak{gl}(I))$ (см. 2.3.1). Эти элементы также будем обозначать символом $p_{k,I}$.

Интегрирование по частям равенства (2.3.9) показывает, что можно записать $M_{i,y,k}$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{L^{-(k+1)} \sqrt{\pi}}{k+1} \left(\sum_{s=1}^{[Ly]} \left(\lambda_s^{A_i, [Ly]} - s + \frac{1}{2} \right)^{k+1} - \mathbf{E} \sum_{s=1}^{[Ly]} \left(\lambda_s^{A_i, [Ly]} - s + \frac{1}{2} \right)^{k+1} \right) \\ = \frac{L^{-(k+1)} \sqrt{\pi}}{k+1} (p_{k+1,I} - \mathbf{E} p_{k+1,I}). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Поэтому Теорема 2.3.1 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 2.3.2. *Пусть $k_1, \dots, k_m \geq 1$ и I_1, \dots, I_m — конечные подмножества в \mathbb{N} , зависящие от параметра L так, что существуют пределы*

$$\eta_r = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_r|}{L} > 0, \quad c_{rs} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_r \cap I_s|}{L}.$$

Тогда, при $L \rightarrow \infty$, набор

$$(L^{-k_r} (p_{k_r, I_r} - \mathbf{E}p_{k_r, I_r}))_{r=1}^m$$

из элементов $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ сходится, в смысле сходимости состояний (см. (2.2.8)), к гауссовскому вектору (ξ_1, \dots, ξ_m) с нулевым средним и ковариацией

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_r \xi_s &= \frac{k_r k_s}{\pi} \oint_{|z|^2 = \frac{\eta_r}{\gamma}; \Im(z) > 0} \oint_{|w|^2 = \frac{\eta_s}{\gamma}; \Im(w) > 0} (x(z))^{k_r-1} (x(w))^{k_s-1} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{c_{rs}/\gamma - zw}{c_{rs}/\gamma - z\bar{w}} \right| \frac{d(x(z))}{dz} \frac{d(x(w))}{dw} dz dw. \end{aligned}$$

2.4 Подсчет ковариации

В этом разделе будет подсчитана асимптотическая ковариация элементов p_{k, I_1} , p_{l, I_2} (см. теорему 2.3.2). Сначала мы найдем ковариацию для элементов $p_{k, I}^\#$, после чего ковариация для элементов $p_{k, I}$ будет найдена из формулы для замены базиса (2.2.9).

Основным результатом данного параграфа является предложение 2.4.1.

Пусть даны множества $I = I(L) \subset \mathbb{N}$, $I_1 = I_1(L) \subset \mathbb{N}$, $I_2 = I_2(L) \subset \mathbb{N}$ такие, что существуют пределы

$$\eta = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I|}{L}, \quad \eta_1 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_1|}{L}, \quad \eta_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_2|}{L}, \quad c = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_1 \cap I_2|}{L}.$$

Напомним, что состояние $\langle \cdot \rangle$ также зависит от параметра L , см. раздел 2.3.2.

Лемма 2.4.1. *В обозначениях выше имеем*

$$\left\langle \frac{p_{k, I_1}^\# - \langle p_{k, I_1}^\# \rangle}{L^k} \cdot \frac{p_{l, I_2}^\# - \langle p_{l, I_2}^\# \rangle}{L^l} \right\rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\min(k, l)} n \binom{k}{n} \binom{l}{n} c^n \gamma^{k+l-n}. \quad (2.4.1)$$

Доказательство. Доказательство этой леммы, использующее явную формулу (см. (2.3.2)) для дифференциальных операторов $\mathcal{D}(p_{k, I}^\#)$, приведено в разделе 2.5.2. \square

Пусть u и v — формальные переменные. Найдем производящую функцию полученного выражения.

Лемма 2.4.2. *Выполнено следующее равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\min(k,l)} n \binom{k}{n} \binom{l}{n} c^n \gamma^{k+l-n} \right) u^k v^l = \frac{c\gamma uv}{((1-\gamma u)(1-\gamma v) - c\gamma uv)^2}. \quad (2.4.2)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1 = \gamma u$, $\mathbf{x}_2 = \gamma v$, $\mathbf{x}_3 = \frac{c}{\gamma}$, и пусть \mathbf{x} , \mathbf{y} — формальные переменные. Ясно, что

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} \mathbf{y}^n \mathbf{x}^k = \frac{1}{1 - (1 + \mathbf{y})\mathbf{x}}.$$

Дифференцированием этого равенства по y n раз получаем, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \mathbf{x}^k = \frac{\mathbf{x}^n}{(1 - \mathbf{x})^{n+1}}.$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \mathbf{x}_1)(1 - \mathbf{x}_2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \binom{k}{n} \binom{l}{n} \mathbf{x}_1^k \mathbf{x}_2^l \mathbf{x}_3^n &= \frac{1}{(1 - \mathbf{x}_1)(1 - \mathbf{x}_2)} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_1^n}{(1 - \mathbf{x}_1)^{n+1}} \frac{\mathbf{x}_2^n}{(1 - \mathbf{x}_2)^{n+1}} \mathbf{x}_3^n &= \frac{1}{(1 - \mathbf{x}_1)(1 - \mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство по \mathbf{x}_3 , мы получаем утверждение леммы. \square

Лемма 2.4.3. *В обозначениях начала параграфа имеем*

$$\frac{p_{k,I}^{\#} - L^{k+1} \eta \gamma^k}{L^k} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \xi_{k,I}, \quad \frac{p_{k,I} - L^{k+1} m_{k,\eta}}{L^k} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \zeta_{k,I}.$$

где $\xi_{k,I}$ и $\zeta_{k,I}$ — нормальные случайные величины с нулевым средним, $m_{k,\eta}$ — некоторая положительная константа, а сходимость понимается как сходимость в смысле состояний (см. раздел 2.2.6) ¹.

¹что в данном случае эквивалентно сходимости в смысле моментов, если рассматривать $p_{k,I}^{\#}$ и $p_{k,I}$ как случайные величины на вероятностном пространстве $Sign(I)$ с мерой P_L^{γ} , см. раздел 2.2.3.

Доказательство. Математическое ожидание для элементов $p_{k,I}^\#$ дается формулой (2.3.4). Существование предела

$$m_{k,\eta} := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle p_{k,I} \rangle}{L^{k+1}}$$

следует из разложимости элементов $p_{k,I}$ в линейную комбинацию $p_{k,I}^\#$. Таким образом, утверждение этой леммы — частный случай предложения 2.5.1, которое будет доказано в разделе 2.5. \square

Напомним, что коэффициент при t^k у формального степенного ряда $A(t)$ мы обозначаем символом $[t^k]\{A(t)\}$.

Замечание 1. Из формулы (2.2.9) легко видеть, что

$$\begin{aligned} m_{k,\eta} &= \frac{1}{k+1} [u^{k+1}] \left\{ (1 + \eta\gamma u^2 + \eta\gamma^2 u^3 + \dots)^{k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{k+1} [u^{k+1}] \left\{ \left(1 + \frac{\gamma\eta u^2}{1 - \gamma u} \right)^{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Вычисляя, получаем

$$m_{k,\eta} = \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k+1} \gamma^{k-r+1} \eta^r \binom{k+1}{r} \binom{k-r}{r-1}.$$

При $\eta = 1$ эта величина совпадает с полученной в [40, Prop. 5].

Мы не определяем случайные величины ξ_{k,I_1} , ξ_{l,I_2} на одном вероятностном пространстве. Однако, мы будем использовать обозначение $\mathbf{E}(\xi_{k,I_1} \xi_{l,I_2})$, определяемое по формуле

$$\mathbf{E}(\xi_{k,I_1} \xi_{l,I_2}) := \lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \frac{p_{k,I_1}^\# - L^{k+1} \eta_1 \gamma^k}{L^k} \cdot \frac{p_{l,I_2}^\# - L^{l+1} \eta_2 \gamma^l}{L^l} \right\rangle.$$

Существование предела в этом выражении следует из предложения 2.5.1. Аналогично, введем обозначение

$$\mathbf{E}(\zeta_{k,I_1} \zeta_{l,I_2}) := \lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \frac{p_{k,I_1} - m_{k,\eta_1} L^{k+1}}{L^k} \cdot \frac{p_{l,I_2} - m_{l,\eta_2} L^{l+1}}{L^l} \right\rangle.$$

Лемма 2.4.4. В обозначениях начала параграфа, с формальными переменными u , v , имеем

$$\mathbf{E}(\zeta_{k,I_1}\zeta_{l,I_2}) = [u^{k+1}][v^{l+1}] \left\{ \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{i,I_1} u^i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_{j,I_2} v^j \right) \right) \times \left(1 + \eta_1 u \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma u)^i \right)^k \left(1 + \eta_2 v \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma v)^j \right)^l \right\}.$$

Идея доказательства. Напомним, что формула перехода между базисами имеет вид (см. (2.2.9))

$$\mathbf{p}_k = \frac{1}{k+1} [u^{k+1}] \left\{ (1 + \mathbf{p}_1^\# u^2 + \mathbf{p}_2^\# u^3 + \dots)^{k+1} \right\} + \dots, \quad (2.4.3)$$

Неформально говоря, лемма 2.4.3 утверждает, что

$$p_{k,I}^\# = \eta \gamma^k L^{k+1} + \xi_{k,I} L^k + o(L^k).$$

Рассматривая выражение

$$\langle (p_{k,I_1} - \langle p_{k,I_1} \rangle) (p_{l,I_2} - \langle p_{l,I_2} \rangle) \rangle,$$

и подставляя в него формулу (2.4.3), мы получаем, что вклады степени L^{k+l+2} и L^{k+l+1} сокращаются, а вклад в L^{k+l} возникает, если в одной из скобок, отвечающих $p_r^\#$, выбирается слагаемое порядка L^r , а во всех остальных — максимальные. Из этого следует утверждение леммы.

Формальное доказательство приведено в разделе 2.5.4. □

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что $\eta_1 \leq \eta_2$.

Напомним, что функция $x(z)$ была определена в разделе 2.2.5. Пусть a и b — формальные переменные.

Лемма 2.4.5. В обозначениях начала параграфа имеем

$$\sum_{k,l \geq 1} \frac{\mathbf{E}(\zeta_{k,I_1}\zeta_{l,I_2})}{a^{k+1}b^{l+1}} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \oint_{|z|^2=\frac{\eta_1}{\gamma}} \oint_{|w|^2=\frac{\eta_2}{\gamma}} \frac{1}{a-x(z)} \frac{1}{b-x(w)} \frac{c/\eta_1}{(cz/\eta_1-w)^2} dzdw, \quad (2.4.4)$$

где $\frac{1}{a-x(z)}$ и $\frac{1}{b-x(w)}$ понимаются как формальные степенные ряды по переменным $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, соответственно. Кроме того, при $\eta_1 = \eta_2$ будем считать, что контур

интегрирования по w имеет вид $|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma} + \delta$, $\delta \ll 1$, а выражение в правой части (2.4.4) воспринимается как предел при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Будем теперь считать, что u, v — комплексные переменные, и пусть контур Γ_u задается условием

$$u = \frac{1}{\gamma + r \exp(i\phi)}, \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

где r — произвольное положительное число с условием $r > 2\gamma$, а контур Γ_v является окружностью с центром в 0 и радиусом $\epsilon \ll 1$. Тогда утверждение леммы 2.4.4 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\mathbf{E}(\zeta_{k, I_1} \zeta_{l, I_2})}{a^{k+1} b^{l+1}} &= \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{u \in \Gamma_u} \oint_{v \in \Gamma_v} \\ &\frac{\mathbf{E}(\sum_{m, n \geq 1} \xi_{m, I_1} \xi_{n, I_2} u^m v^n)}{(ua - (1 + \eta_1(\gamma u^2 + \gamma^2 u^3 + \dots)))(vb - (1 + \eta_2(\gamma v^2 + \gamma^2 v^3 + \dots)))} dudv \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{u \in \Gamma_u} \oint_{v \in \Gamma_v} \frac{1}{(ua - 1 - \frac{\eta_1 \gamma u^2}{(1-\gamma u)})} \frac{1}{(vb - 1 - \frac{\eta_2 \gamma v^2}{(1-\gamma v)})} \\ &\quad \times \frac{c\gamma uv}{((1-\gamma u)(1-\gamma v) - c\gamma uv)^2} dudv, \quad (2.4.5) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве используются леммы 2.4.1 и 2.4.2 (несимметричный выбор контуров Γ_u и Γ_v связан с неравенством $\eta_1 \leq \eta_2$). Сделаем замену переменных

$$z = \frac{-\eta_1}{(1/u - \gamma)}, \quad w = \frac{-1}{\gamma v} + 1.$$

При такой замене переменных контуры Γ_u и Γ_v перейдут в контуры Γ_z и Γ_w , также обходящие вокруг 0, при этом контур Γ_z находится внутри контура Γ_w . Равенство (2.4.5) после такой замены приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\mathbf{E}(\zeta_{k, I_1} \zeta_{l, I_2})}{a^{k+1} b^{l+1}} &= \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_z} \oint_{\Gamma_w} \frac{1}{a + (\eta_1/z + \gamma(-1 + z))} \frac{1}{b + (\eta_2/w + \gamma(-1 + w))} \\ &\quad \times \frac{c/\eta_1}{(cz/\eta_1 - w)^2} dzdw. \end{aligned}$$

Напомним, что выражение в правой части рассматривается как формальный степенной ряд по переменным $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Таким образом, полюса подынтегральной функции могут находиться в точках $z = 0$ и $w = 0$, а также при $\frac{cz}{\eta_1} - w = 0$. Продеформируем Γ_z в окружность $|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}$, а Γ_w — в окружность $|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}$ (а в случае $\eta_1 = \eta_2$, будем деформировать Γ_w в окружность $|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma} + \delta$, для $\delta \ll 1$). Эта деформация не проходит через возможные полюса подынтегральной функции, так как, очевидно, $\frac{c}{\eta_1} \leq 1$ и выполнено условие $\eta_1 \leq \eta_2$. Тогда

$$x(z) = \frac{-\eta_1}{z} - \gamma(z - 1), \quad \text{при } |z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma},$$

$$x(w) = \frac{-\eta_2}{w} - \gamma(w - 1), \quad \text{при } |w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k,l \geq 1} \frac{\mathbf{E}(\zeta_{k,I_1} \zeta_{l,I_2})}{a^{k+1} b^{l+1}} = \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}} \oint_{|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}} \frac{1}{(a - x(z))(b - x(w))} \frac{c/\eta_1}{(cz/\eta_1 - w)^2} dz dw.$$

В случае $\eta_1 = \eta_2$ мы получаем это уравнение при контуре интегрирования по w вида $|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma} + \delta$ и пределе $\delta \rightarrow 0$.

□

Предложение 2.4.1. В обозначениях начала параграфа имеем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \frac{p_{k,I_1} - \langle p_{k,I_1} \rangle}{L^k} \cdot \frac{p_{l,I_2} - \langle p_{l,I_2} \rangle}{L^l} \right\rangle = \frac{kl}{\pi} \oint_{|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}; \Im(z) > 0} \oint_{|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}; \Im(w) > 0} (x(z))^{k-1} (x(w))^{l-1} \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{c/\gamma - zw}{c/\gamma - z\bar{w}} \right| \frac{d(x(z))}{dz} \frac{d(x(w))}{dw} dz dw. \quad (2.4.6)$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{1}{a - x(z)} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x(z)}{a} + \frac{x^2(z)}{a^2} + \dots \right),$$

то, рассматривая (2.4.4) как равенство всех соответствующих коэффициентов двух формальных степенных рядов, получаем

$$\mathbf{E}(\zeta_{k,I_1} \zeta_{l,I_2}) = \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{|z|^2 = \eta_1/\gamma} \oint_{|w|^2 = \eta_2/\gamma} x(z)^k x(w)^l \frac{c/\eta_1}{(cz/\eta_1 - w)^2}. \quad (2.4.7)$$

Заметим, что при $\eta_1 = \eta_2$ в подынтегральной функции правой части (2.4.6) находится интегрируемая особенность. Поэтому для окончания подсчёта достаточно преобразовать правую часть (2.4.6) в правую часть (2.4.7).

Поскольку $|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}$, то

$$2 \ln \left| \frac{c/\gamma - zw}{c/\gamma - z\bar{w}} \right| = -\ln \left(\frac{c}{\eta_1} z - w \right) - \ln \left(\frac{c}{\eta_1} \bar{z} - \bar{w} \right) + \ln \left(\frac{c}{\eta_1} \bar{z} - w \right) + \ln \left(\frac{c}{\eta_1} z - \bar{w} \right).$$

Поэтому интеграл в (2.4.6) можно записать в виде

$$\frac{-kl}{4\pi^2} \oint_{|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}} \oint_{|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}} (x(z))^{k-1} (x(w))^{k-1} \ln \left(\frac{c}{\eta_1} z - w \right) \frac{d(x(z))}{dz} \frac{d(x(w))}{dw} dz dw.$$

Интегрируя это выражение по частям, получаем

$$\frac{-1}{4\pi^2} \oint_{|z|^2 = \frac{\eta_1}{\gamma}} \oint_{|w|^2 = \frac{\eta_2}{\gamma}} (x(z))^k (x(w))^l \frac{c}{\eta_1} \frac{1}{(c/\eta_1 z - w)^2} dz dw,$$

что совпадает с (2.4.7).

Поскольку утверждение предложения симметрично по I_1 и I_2 , то условие $\eta_1 \leq \eta_2$ можно опустить.

□

2.5 Доказательство асимптотической гауссовости

Пусть $I_1 = I_1(L)$, $I_2 = I_2(L)$, \dots , $I_r = I_r(L)$ — набор конечных подмножеств натуральных чисел, зависящих от растущего параметра L , для которых существуют пределы

$$\eta_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_i|}{L}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

$$c_{ij} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|I_i \cap I_j|}{L}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Основным доказываемым утверждением в этом разделе является

Предложение 2.5.1. Пусть $f_1 \in Z(\mathfrak{gl}(I_1))$, $f_2 \in Z(\mathfrak{gl}(I_2))$, \dots , $f_r \in Z(\mathfrak{gl}(I_r))$ — произвольные элементы. Тогда

$$\left(\frac{f_1 - \langle f_1 \rangle}{L^{\text{wt}(f_1)-1}}, \frac{f_2 - \langle f_2 \rangle}{L^{\text{wt}(f_2)-1}}, \dots, \frac{f_r - \langle f_r \rangle}{L^{\text{wt}(f_r)-1}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),$$

где $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ — гауссовский случайный вектор с нулевым средним, а сходимость понимается как сходимость в смысле состояний (см. раздел 2.2.6).

В разделе 2.5.1 мы докажем частный случай этого утверждения, в разделе 2.5.2 будет приведено доказательство леммы 2.4.1, в разделе 2.5.3 мы докажем предложение 2.5.1, а в разделе 2.5.4 будет доказана лемма 2.4.4.

2.5.1 Начало доказательства предложения 2.5.1

В этом разделе мы докажем предложение 2.5.1 для случая

$$f_i = p_{k_i, I_i}^\#, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Пусть

$$\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^r I_i.$$

Напомним, что элементы $\{p_{k_i, I_i}^\#\}$ можно представить в алгебре дифференциальных операторов $\mathbb{C}[x_{ij}, \partial_{ij}]$, $i, j \in \mathcal{I}$, в виде (см. (2.3.2))

$$D_{\mathcal{I}}(p_{k_j, I_j}^\#) = \sum_{i_1, \dots, i_{k_j} \in I_j; \alpha_1, \dots, \alpha_{k_j} \in \mathcal{I}} x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_{k_j} i_{k_j}} \partial_{\alpha_1 i_2} \dots \partial_{\alpha_{k_j} i_1}.$$

Тогда произведение $p_{k_j, I_j}^\#$ вычисляется как произведение соответствующих им дифференциальных операторов, а состояние элемента, отвечающего дифференциальному оператору \mathcal{D} , вычисляется по формуле

$$\mathcal{D} \exp \left(\gamma L \sum_{i \in \mathcal{I}} (x_{ii} - 1) \right) \Big|_{x_{ij} = \delta_{ij}},$$

см. раздел 2.3.1.

Пусть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ — гауссовский случайный вектор с нулевым средним. Напомним, что совместные моменты его компонент вычисляются по формуле Вика

$$\mathbf{E}(\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_l}) = \begin{cases} 0, & l \text{ — нечетно,} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{PM}(l)} \prod_{i=1}^{l/2} \mathbf{E}(\xi_{\sigma(2i-1)} \xi_{\sigma(2i)}), & l \text{ — четно,} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

где $\mathcal{PM}(l)$ — это множество инволюций $\{1, 2, \dots, l\}$ без неподвижных точек.

Пусть

$$\nu_j := p_{k_j, I_j}^\# - \langle p_{k_j, I_j}^\# \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

и пусть

$$C_\nu(i, j) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \nu_i \nu_j \rangle}{L^{k_i + k_j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r,$$

— асимптотическая ковариация этих величин (существование предела будет доказано ниже).

Предложение 2.5.2. *В обозначениях выше имеем*

$$\frac{\langle \nu_1 \nu_2 \dots \nu_r \rangle}{L^{k_1 + k_2 + \dots + k_r}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & r \text{ — нечетно,} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{PM}(r)} \prod_{i=1}^{r/2} C_\nu(\sigma(2i-1), \sigma(2i)), & r \text{ — четно.} \end{cases}$$

Из этого предложения и формулы Вика (2.5.1) следует асимптотическая гауссовость величин $\frac{\nu_i}{L^{k_i}}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Введем некоторые определения. Для монома M от $\{x_{ij}, \partial_{ij}\}$ (т.е. для слова из алфавита $\{x_{ij}, \partial_{ij}\}$) назовем *носителем* $\text{supp}(M)$ множество индексов всех множителей. Будем называть *покрытием* $\text{cov}(M)$ число элементов в носителе. Определим x -степень монома как количество x -множителей, входящих в него, и ∂ -степень — как число ∂ -множителей. В случае, когда x - и ∂ -степени монома M совпадают, будем называть *степенью* и обозначать символом $\text{deg}(M)$ число, равное этим степеням. Назовем *емкостью* монома M количество диагональных ∂ -операторов ∂_{ii} в M , и будем обозначать это число $\text{cap}(M)$.

Будем называть мономы M_1 и M_2 *изоморфными*, если между $\text{supp}(M_1)$ и $\text{supp}(M_2)$ существует биекция, переводящая их друг в друга. Обозначим множество мономов с индексами из \mathcal{I} , изоморфных данному моному M_0 , символом $\text{Isom}(M_0)$.

Пример. Пусть $M = x_{12}\partial_{23}x_{23}x_{22}\partial_{41}\partial_{33}$. Тогда $\text{supp}(M) = \{1, 2, 3, 4\}$, $\text{cov}(M) = 4$, $\text{deg}(M) = 3$, $\text{cap}(M) = 1$.

Заметим, что для всякого монома M_0 выполнено

$$\langle M_0 \rangle = O(L^{\text{cap}(M_0)}),$$

$$\left\langle \sum_{M: M \in \text{Isom}(M_0); \text{supp}(M) \subset \mathcal{I}} M \right\rangle = O(|\mathcal{I}|^{\text{cov}(M_0)} L^{\text{cap}(M_0)}).$$

Назовем моном M ∂ -регулярным, если для любых $i, j \in \text{supp}(M)$, $i \neq j$, и для любого множителя ∂_{ij} , правее этого множителя находится строго больше букв x_{ij} , чем ∂_{ij} . Назовем моном M x -регулярным, если для любых $i, j \in \text{supp}(M)$, $i \neq j$, и для любого множителя x_{ij} , левее этого множителя находится строго больше букв ∂_{ij} , чем x_{ij} . Будем говорить, что моном M *регулярен*, если он ∂ -регулярен и x -регулярен. Легко видеть, что если моном M не является регулярным, то

$$M \exp\left(\gamma L \sum (x_{ii} - 1)\right) \Big|_{x_{ij}=\delta_{ij}} = 0.$$

Определим введенные понятия для дифференциальных операторов вида

$$D = (x_{i_1 i_1}^{l_1} \partial_{i_1 i_1}^{l_1} - L^{l_1}) \dots (x_{i_s i_s}^{l_s} \partial_{i_s i_s}^{l_s} - L^{l_s}). \quad (2.5.2)$$

Носителем такого оператора назовем множество индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, покрытием — число различных элементов в носителе, и степенью — число $l_1 + l_2 + \dots + l_s$.

Сформулируем две леммы, которые будут доказаны ниже.

Лемма 2.5.1. *Для любого оператора вида (2.5.2) выполнено*

$$\langle D \rangle = O(L^{\text{deg}(D) - \text{cov}(D)}),$$

при этом

$$\langle D \rangle = O(L^{\text{deg}(D) - \text{cov}(D) - 1}), \quad (2.5.3)$$

если $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ не разбивается на дизъюнктные пары равных индексов (в частности, (2.5.3) выполняется для всех нечетных s).

Лемма 2.5.2. Пусть $C(1), \dots, C(m)$ — мономы вида

$$C(l) = x_{\alpha_1^l i_1^l} \dots x_{\alpha_{k_l}^l i_{k_l}^l} \partial_{\alpha_1^l i_2^l} \dots \partial_{\alpha_{k_l}^l i_1^l}, \quad 1 \leq l \leq m,$$

причем $\text{cov}(C(l)) \geq 2$ ². Предположим, что моном

$$M = C(1)C(2) \dots C(m)$$

регулярен. Тогда

$$\text{cap}(M) \leq \text{deg}(M) - \text{cov}(M),$$

причем равенство возможно только в случае, если m четно и существует $m/2$ дизъюнктивных множеств $J_1, \dots, J_{m/2}$ и разбиение $\{C(1), \dots, C(m)\}$ на пары $\{C(j_1), C(j_2)\}, \dots, \{C(j_{m-1}), C(j_m)\}$, такие что

$$J_k = \text{supp}(C(j_{2k-1})) = \text{supp}(C(j_{2k})), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}.$$

Докажем предложение 2.5.2, используя леммы 2.5.1 и 2.5.2. Доказательство лемм дано ниже.

Доказательство. Используя (2.3.2) и (2.3.4), запишем каждый оператор ν_l в виде

$$\begin{aligned} \nu_l = & \sum_{i \in I_l} (x_{ii}^{k_l} \partial_{ii}^{k_l} - \gamma^{k_l} L^{k_l}) \\ & + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_l} \in \mathcal{I}; i_1, \dots, i_{k_l} \in I_l} x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_{k_l} i_{k_l}} \partial_{\alpha_1 i_2} \dots \partial_{\alpha_{k_l} i_1}, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

где во втором слагаемом суммирование идет по мономам, не все индексы которых совпадают. Обозначим слагаемые в (2.5.4) символами ν_l^{diag} и $\nu_l^{\text{off-diag}}$, соответственно.

В произведении

$$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r = (\nu_1^{\text{diag}} + \nu_1^{\text{off-diag}}) \dots (\nu_r^{\text{diag}} + \nu_r^{\text{off-diag}})$$

²В обозначениях α_m^l, i_n^l верхняя l является дополнительным индексом, а не степенью.

раскроем скобки. Каждый из полученных множителей является суммой по индексам, и в нем мы также раскроем скобки. Таким образом, выражение $\nu_1\nu_2\dots\nu_l$ представляется в виде суммы по индексам произведений множителей вида $(x_{ii}^k\partial_{ii}^k - L^k)$ (будем называть их *диагональными*) и множителей вида $x_{\alpha_1 i_1}x_{\alpha_2 i_2}\dots x_{\alpha_k i_k}\partial_{\alpha_1 i_2}\dots\partial_{\alpha_k i_1}$, покрытие которых больше или равно 2 (будем называть такие множители *внедиагональными*).

Рассмотрим одно из получившихся слагаемых. Пусть в нем находятся диагональные множители D_{a_1}, \dots, D_{a_s} из $\nu_{a_1}^{diag}, \dots, \nu_{a_s}^{diag}$, $a_1 < \dots < a_s$, и внедиагональные множители C_{b_1}, \dots, C_{b_t} из $\nu_{b_1}^{off-diag}, \dots, \nu_{b_t}^{off-diag}$, $b_1 < \dots < b_t$, $s + t = r$.

Заметим, что если такое слагаемое вносит ненулевой вклад в $\langle \nu_1\nu_2\dots\nu_r \rangle$, то моном $C_{b_1}\dots C_{b_t}$ является регулярным. Поэтому из леммы 5.2 следует, что

$$cap(C_{b_1}\dots C_{b_t}) \leq k_{b_1} + \dots + k_{b_t} - cov(C_{b_1}\dots C_{b_t}),$$

причем равенство достигается только если множители C_{b_1}, \dots, C_{b_t} разбиваются на пары с непересекающимися носителями, общими для обоих членов каждой пары.

Рассмотрим слагаемые, для которых

$$supp(D_{a_1}, \dots, D_{a_s}) \cap supp(C_{b_1}, \dots, C_{b_t}) = \emptyset.$$

Тогда из лемм 5.1 и 5.2 следует, что вклад одного слагаемого не превосходит

$$O(L^{k_1+\dots+k_r-cov(D_{a_1}\dots D_{a_s})-cov(C_{b_1}\dots C_{b_t})}),$$

если и $\{D_{a_1}, \dots, D_{a_s}\}$, и $\{C_{b_1}, \dots, C_{b_t}\}$ разбиваются на пары с одинаковыми носителями, причем носители различных пар не пересекаются, и

$$O(L^{k_1+\dots+k_r-cov(D_{a_1}\dots D_{a_s})-cov(C_{b_1}\dots C_{b_t})-1})$$

в противном случае. Поскольку в сумме для $\langle \nu_1\nu_2\dots\nu_r \rangle$ имеется

$$O(L^{cov(D_{a_1}, \dots, D_{a_s})+cov(C_{b_1}, \dots, C_{b_t})})$$

слагаемых такого вида, их общий вклад равен $L^{k_1+\dots+k_r}$ только в случае разбиения носителей на дизъюнктные пары. Легко видеть, что

$$\langle \nu_1 \nu_2 \rangle = \langle \nu_1^{diag} \nu_2^{diag} \rangle + \langle \nu_1^{off-diag} \nu_2^{off-diag} \rangle = \sum_{supp(D_1)=supp(D_2) \in I_1 \cap I_2} \langle D_1 D_2 \rangle + \sum_{supp(C_1)=supp(C_2) \in I_1 \cap I_2} \langle C_1 C_2 \rangle.$$

Поэтому общий вклад таких слагаемых записывается в виде

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{PM}(r)} \langle \nu_{\sigma(1)} \nu_{\sigma(2)} \rangle \dots \langle \nu_{\sigma(r-1)} \nu_{\sigma(r)} \rangle + O(L^{k_1+k_2+\dots+k_r-1}).$$

Осталось доказать, что вклад слагаемых с

$$supp(D_{a_1}, \dots, D_{a_s}) \cap supp(C_{b_1}, \dots, C_{b_t}) \neq \emptyset \quad (2.5.5)$$

имеет порядок $O(L^{k_1+k_2+\dots+k_r-1})$. Рассмотрим одно из таких слагаемых, которое обозначим символом S . Возьмем один из его множителей D_j , для которого $supp(D_j) \subset supp(C_{b_1} \dots C_{b_t})$, и рассмотрим оператор S' , получающийся из S выбрасыванием множителя D_j . Тогда среднее от S' можно оценить следующим образом: по лемме 2.5.2

$$cap(C_{b_1} \dots C_{b_t}) \leq deg(C_{b_1} \dots C_{b_t}) - cov(C_{b_1} \dots C_{b_t}).$$

Множители диагонального типа с носителями в $supp(C_{b_1} \dots C_{b_t})$ добавляют к среднему не более L в своей степени, а произведение множителей диагонального типа с носителями не в $supp(C_{b_1}, \dots, C_{b_t})$ по лемме 2.5.1 дает вклад не более $L^{deg-cov}$. Таким образом,

$$\langle S' \rangle = O(L^{deg(S')-cov(S')}).$$

Теперь оценим среднее от всего множителя S . Пусть

$$D_j = x_{ss}^l \partial_{ss}^l - \gamma^l L^l.$$

Напомним, что в алгебре $\mathbb{C}[x_{ij}, \partial_{ij}]$ выполнены коммутационные соотношения

$$[\partial_{ij}, x_{ij}] = \mathbf{1}_{(i,j)=(k,l)}. \quad (2.5.6)$$

Пользуясь ими, будем “проносить” все x_{ss} из D_j налево, а все ∂_{ss} — направо. После такой операции S будет записано в виде суммы нескольких слагаемых. Заметим, что слагаемое, в котором все x_{ss} прошли влево, а ∂_{ss} — вправо, дает в точности такой же вклад, что и $\gamma^l L^l$, умноженное на $\langle S' \rangle$. Следовательно, вклад этого члена сокращается с вкладом, возникающим из $(-\gamma^l L^l)$ в D_j . С другой стороны, если x_{ss} или ∂_{ss} взаимодействуют с другими множителями в процессе перемещения, то это уменьшает общее количество ∂_{ss} , и те же рассуждения, что и при оценке $\langle S' \rangle$, показывают, что вклад такого члена в среднее есть

$$O(L^{k_1+\dots+k_r-1-cov(S)}).$$

Поскольку суммирование по различным индексам добавляет $O(L^{cov(S)})$, то общий вклад слагаемых вида (2.5.5) равняется $O(L^{k_1+\dots+k_r-1})$, что завершает доказательство предложения 2.5.2.

В частности, при $r = 2$ из приведенных рассуждений следует, что величина $\langle \nu_1 \nu_2 \rangle$ имеет порядок $L^{k_1+k_2}$. При этом вклад в $L^{k_1+k_2}$ дают некоторые классы изоморфных графов. Поскольку таких классов конечное число, то из этого следует существование асимптотической ковариации — предела величины $L^{-(k_1+k_2)} \langle \nu_1 \nu_2 \rangle$.

Доказательство леммы 2.5.1. Ввиду коммутирования множителей (2.5.2) с различными индексами, достаточно доказать, что

$$(x^{l_1} \partial^{l_1} - (\gamma L)^{l_1}) \dots (x^{l_q} \partial^{l_q} - (\gamma L)^{l_q}) \exp(\gamma L(x-1)) \Big|_{x=1} = \begin{cases} O(L^{l_1+\dots+l_q-1}), & \text{при } q = 2, \\ O(L^{l_1+\dots+l_q-2}), & \text{при } q \geq 3. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

В выражении

$$(x^{l_1} \partial^{l_1} - (\gamma L)^{l_1}) \dots (x^{l_q} \partial^{l_q} - (\gamma L)^{l_q})$$

раскроем скобки в первом множителе и, пользуясь соотношениями (2.5.6), прокоммутируем все операторы ∂ направо. После такой операции возникло несколько слагаемых. Слагаемое, в котором все ∂ без сокращений “прошли” направо, дает в точности тот же вклад в среднее, что и возникающее при умножении на $\gamma^l L^l$, и поэтому сокращается с вкладом от $(-\gamma L)^l$. Если же слагаемое возникло в результате a взаимных

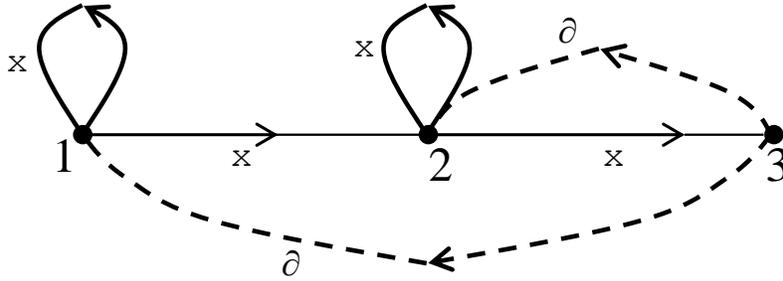


Рис. 2.3: Граф, отвечающий моному $x_{11}x_{22}x_{12}\partial_{31}x_{23}\partial_{32}$

уничтожений символов x и ∂ , то легко видеть, что среднее от такого члена будет равно $O(L^{l_1+\dots+l_q-a})$. Из этого следует (2.5.7) в случае $q = 2$. Если же $a = 1$ и $q \geq 3$, то соответствующий член может быть записан в виде

$$\dots (x^{l_k}\partial^{l_k} - (\gamma L)^{l_k}) \dots$$

Раскрывая скобки в сохранившем прежний вид множителе и повторяя рассуждения, мы снова получаем сокращающийся вклад в слагаемом, в котором не произошло взаимных уничтожений. Поэтому все остающиеся слагаемые дают вклад $O(L^{l_1+\dots+l_q-2})$.

Доказательство леммы 2.5.2. Будем кодировать слова из алфавита $\{x_{ij}, \partial_{ij}\}$ графами с дополнительной структурой. Каждому индексу из носителя монома мы сопоставляем вершину графа. Ребра графа будут двух сортов: x -ребра и ∂ -ребра. Каждой букве x_{ij} мы сопоставляем ориентированное x -ребро, соединяющее вершины, отвечающие индексам i и j . Аналогично, каждой букве ∂_{ij} мы сопоставляем ∂ -ребро между теми же вершинами. Кроме того, введем на ребрах графа линейный порядок, соответствующий порядку букв в слове; чем меньше ребро относительно этого порядка, тем правее стоит его буква в слове. Такой порядок задает очередность применения множителей к функции $\exp(\gamma L \sum (x_{ii} - 1))$.

Пример. Моном $x_{11}x_{22}x_{12}\partial_{31}x_{23}\partial_{32}$ переходит в граф, показанный на рисунке 2.3.

Композиция дифференциальных операторов (конкатенация слов), соответствует

³Напомним, что на ребрах графа также задан линейный порядок. Этот порядок не обозначается на рисунках.

склейке двух графов по некоторым вершинам (по общим для двух слов индексам). Порядок на ребрах склеенного графа индуцируется порядками исходных графов и условием, что все ребра правого (ранее применяемого) монома меньше всех ребер левого.

Введем обозначения для такого графа G . Пусть $V(G)$ — множество вершин G . Пусть $E_x(G)$, $E_\partial(G)$, $E(G)$ — множества невырожденных (соединяющих различные вершины) x -, ∂ - и всех ребер G , соответственно. Пусть $L_x(G)$, $L_\partial(G)$, $L(G)$ — множества вырожденных ребер (петель). Пусть E_x^{ab} , E_∂^{ab} , E^{ab} — множества (невырожденных) ребер между $a, b \in V(G)$, $a \neq b$. Назовем построенный по моному граф x -, ∂ -, или просто регулярным, если исходный моном обладал соответствующим свойством.

Определение. Назовем *полным циклом* степени $k \geq 1$ граф, отвечающий моному $x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_k i_k} \partial_{\alpha_1 i_2} \dots \partial_{\alpha_k i_1}$ с носителем размера $2k$. Назовем *циклом* степени $k \geq 1$ граф, полученный из того же монома, но носитель которого удовлетворяет соотношению $2 \leq cov \leq 2k$. Цикл можно получить из полного цикла идентификацией некоторых вершин (при этом должны оставаться как минимум две различные вершины).

Определение. Назовем *полным x -циклом* граф, полученный из полного цикла склейкой начала и конца каждого ∂ -ребра, а *полным ∂ -циклом* — граф, полученный из полного цикла склейкой начала и конца каждого x -ребра.

Определение. Назовем *x -циклом* граф, получаемый из полного x -цикла отождествлением некоторых, но не всех, вершин, соединенных ребром. Аналогично, назовем *∂ -циклом* граф, получаемый из полного ∂ -цикла отождествлением некоторых, но не всех вершин, соединенных ребром.

Примеры введенных графов показаны на рисунках 2.4 и 2.5.

Заметим, что если ∂ -регулярный цикл не является x -циклом, то

$$|E_x(G)| > |V(G)|,$$

а в x -цикле выполнено $|E_x(G)| = |V(G)|$.

Легко видеть, что склейка ∂ -цикла и x -цикла является регулярным графом в том и только в том случае, если замкнутые цепи невырожденных ∂ -ребер и x -ребер в

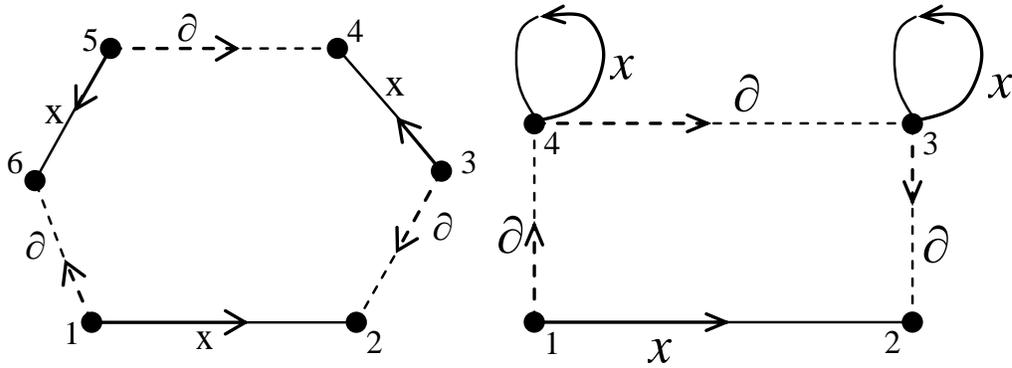


Рис. 2.4: Полный цикл, соответствующий моному $x_{12}x_{34}x_{56}\partial_{32}\partial_{54}\partial_{16}$ (слева) и цикл, соответствующий моному $x_{12}x_{33}x_{44}\partial_{32}\partial_{43}\partial_{14}$ (справа).

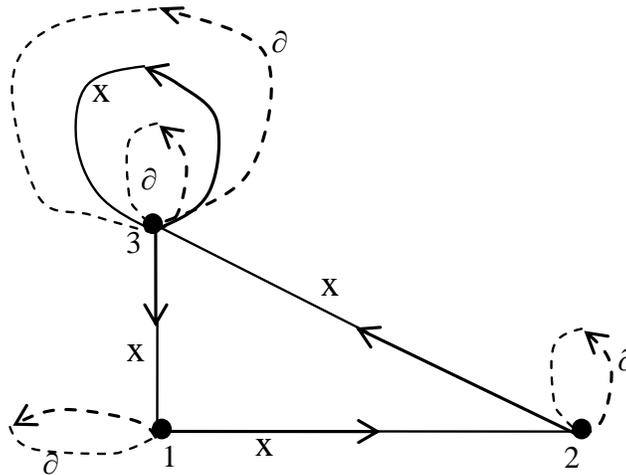


Рис. 2.5: x -цикл, соответствующий моному $x_{12}x_{23}x_{33}x_{31}\partial_{22}\partial_{33}\partial_{33}\partial_{11}$

точности накладываются друг на друга. Такую склейку ∂ -цикла и x -цикла назовем *регулярной*.

Будем обозначать склейку графов символом $\#$, регулярную склейку ∂ -цикла и x -цикла — символом $\#_R$, а склейку графов с дизъюнктивными носителями — символом \sqcup .

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.5.3. *Пусть задан набор циклов $C(1), C(2), \dots, C(n)$. Предположим, что граф $G = C(1)\#C(2)\#\dots\#C(n)$ является ∂ -регулярным. Тогда*

$$|V(G)| \leq |E_x(G)|,$$

и равенство достигается в том и только в том случае, когда существует дизъюнктивное разбиение

$$\{1, 2, \dots, n\} = \{i_1, i_2\} \sqcup \dots \sqcup \{i_{2k-1}, i_{2k}\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-2k}\},$$

такое что $C(i_1), \dots, C(i_{2k-1})$ — ∂ -циклы, $C(i_2), \dots, C(i_{2k}), C(j_1), \dots, C(j_{n-2k})$ — x -циклы, и выполнено

$$G = (C(i_1)\#_R C(i_2)) \sqcup \dots \sqcup (C(i_{2k-1})\#_R C(i_{2k})) \sqcup C(j_1) \sqcup \dots \sqcup C(j_{n-2k}).$$

Доказательство леммы 2.5.3. ∂ -регулярность G влечет ∂ -регулярность $C(n)$, $C(n-1)\#C(n)$, и т.д. Докажем лемму индукцией по n . Из ∂ -регулярности $C(n)$ следует, что $C(n)$ получается идентификацией вершин полного x -цикла; при этом $|V(C(n))| \leq |E_x(C(n))|$, и равенство равносильно тому, что $C(n)$ есть x -цикл.

Предположим, что лемма верна для графа

$$G_2 := C(2)\#\dots\#C(n)$$

и докажем её для графа

$$G_1 := C(1)\#C(2)\#\dots\#C(n).$$

Докажем сначала, что $|V(G_1)| \leq |E_x(G_1)|$. Рассмотрим три случая:

- 1) $G_1 = C(1) \sqcup G_2$, то есть склейки вершин не происходит.
- 2) $V(G_1) = V(G_2)$, то есть каждая вершина $C(1)$ приклеивается к какой-то вершине G_2 .
- 3) У $C(1)$ имеются как вершины, которые склеиваются с вершинами из G_2 , так и те, которые не склеиваются.

В первом случае выполнено

$$|V(G_1)| - |E_x(G_1)| = |V(G_2)| - |E_x(G_2)| + |V(C_1)| - |E_x(C_1)|.$$

Далее, в этом случае ∂ -регулярность G_1 влечет ∂ -регулярность $C(1)$, и индукционное предположение для G_2 вместе с базой индукции для $C(1)$ дают неравенство $|V(G_1)| \leq |E_x(G_1)|$.

Во втором случае выполнено $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ и $E_x(G_1) \geq E_x(G_2)$, поэтому индукционное предположение влечет $|V(G_1)| \leq |E_x(G_2)|$.

Рассмотрим случай (3). Из ∂ -регулярности G_1 следует, что G_1 не имеет невырожденных ∂ -ребер с началом или концом вне G_2 . Поэтому новые вершины присоединяются к графу G_2 с помощью звеньев, состоящих из вырожденных и невырожденных x -ребер и вырожденных ∂ -ребер, начальная и конечная вершина которых лежит в G_2 , а все промежуточные — вне G_2 . Это означает, что G_1 можно получить склейкой некоторых вершин из графа вида показанного на рисунке 2.6 (звеньев может быть несколько).

Количество вершин вне G_2 у такого графа строго меньше количества невырожденных x -ребер с концами в таких вершинах. При склейке этих вершин, как легко видеть, исчезает по крайней мере столько же вершин, сколько невырожденных x -ребер. Таким образом, при переходе от G_2 к G прибавляется меньше вершин, чем невырожденных ребер, и из предположения индукции следует, что $|V(G)| < |E_x(G)|$.

Тем самым, во всех трех случаях мы показали, что $|V(G_1)| \leq |E_x(G_1)|$, причем в третьем случае неравенство строгое. Кроме того, мы показали, что

$$|V(G_1)| - |E_x(G_1)| \leq |V(G_2)| - |E_x(G_2)|. \quad (2.5.8)$$

Предположим теперь, что $|V(G_1)| = |E_x(G_1)|$. Из (2.5.8) следует, что и $|V(G_2)| =$

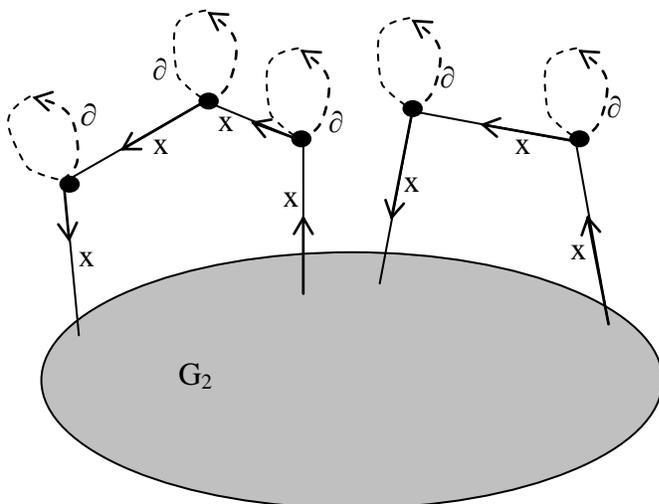


Рис. 2.6: Граф G_1 , возникающий из графа G_2 с помощью двух звеньев.

$|E_x(G_2)|$, и, по предположению индукции, G_2 имеет требуемый вид.

Рассмотрим теперь те же три случая. Из-за строгого неравенства случай (3) невозможен. В случае (1) база и предположение индукции дают требуемое представление для G_1 .

Рассмотрим случай (2). Поскольку $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, то $E_x(C(1)) = \emptyset$. Значит, $C(1)$ получается некоторой идентификацией вершин в полном ∂ -цикле. Из ∂ -регулярности следует, что

$$|E_{\partial}^{ab}(C(1))| \leq |E_x^{ab}(G_2)| - |E_{\partial}^{ab}(G_2)|, \quad \text{для любых } a, b \in V(G_2), a \neq b.$$

Из структуры G_2 (индукционное предположение) следует, что все элементы $E_{\partial}(C(1))$ обязаны однократно накрыть невырожденные x -ребра одного из x -циклов в G_2 , что завершает доказательство леммы 2.5.3. \square

Закончим теперь доказательство леммы 2.5.2. Рассмотрим мономы $C(1), \dots, C(n)$ и графы, которые им соответствуют. В терминах графа емкость монома M равна

$$|L_{\partial}| = \text{deg} - |E_{\partial}|.$$

Для регулярного графа выполнено равенство $|E_x| = |E_{\partial}|$, поэтому емкость равняется $\text{deg}(M) - |E_x|$. С другой стороны, верно $\text{cov}(M) = |V|$. Поэтому требуемое неравенство

преобразуется:

$$\text{cap}(M) \leq \text{deg}(M) - \text{cov}(M) \text{ равносильно } |V| \leq |E_x|,$$

а последнее неравенство следует из леммы 2.5.3.

Если $\text{cap}(M) = \text{deg}(M) - \text{cov}(M)$, то $|V| = |E_x|$ и возникает разбиение индексов из формулировки леммы 2.5.3. Но у регулярного графа множество $\{j_1, \dots, j_{n-2k}\}$ одиночных x -циклов должно быть пустым (в лемме 2.5.3 требовалась лишь ∂ -регулярность), поэтому мы получаем требуемое разбиение носителей на совпадающие дизъюнктные пары. □

2.5.2 Доказательство леммы 2.4.1

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями, введенными в разделе 2.5.1.

Доказательство леммы 2.4.1. Представим, как и ранее, величины ν_i , $i = 1, 2$, в виде суммы диагональных и внедиагональных множителей. Легко видеть, что

$$\langle \nu_1 \nu_2 \rangle = \langle \nu_1^{diag} \nu_2^{diag} \rangle + \langle \nu_1^{off-diag} \nu_2^{off-diag} \rangle.$$

Первый член может давать ненулевой вклад только в том случае, если индексы в суммах для ν_1^{diag} и ν_2^{diag} совпадают.

Заметим, что

$$(x^k \partial^k - (\gamma L)^k)(x^l \partial^l - (\gamma L)^l) \exp(\gamma L(x-1))|_{x=1} = kl \gamma^{k+l-1} L^{k+l-1} + o(L^{k+l-1}).$$

Поскольку одну вершину можно выбрать $|I_1 \cap I_2|$ способами, то вклад первого члена в коэффициент при L^{k+l} равен

$$kl \frac{|I_1 \cap I_2|}{L} \gamma^{k+l-1}. \quad (2.5.9)$$

Рассмотрим второй член. Произведение мономов из $\nu_1^{off-diag}$ и $\nu_2^{off-diag}$ дает ненулевой вклад только если первый из них содержит только невырожденные ∂ -ребра, а

второй — только невырожденные x -ребра, при этом цепи этих ребер должны совпадать. Если эти графы содержат $n \geq 2$ вершин, то вклад порядка L^{k+l} от класса изоморфных графов может быть достигнут только если множители являются ∂ -циклом и x -циклом, соответственно.

Зафиксируем упорядоченный набор из n индексов. Простой комбинаторный подсчет показывает, что существует $\binom{k}{n}$ неизоморфных мономов, графы которых являются ∂ -циклами с n невырожденными ребрами, которые посещают зафиксированные вершины в выбранном порядке и возникают с помощью отождествления вершин из полных ∂ -циклов длины $k \geq n$. Аналогично, существует $\binom{l}{n}$ неизоморфных x -циклов, удовлетворяющих аналогичному условию. Кроме того, первая вершина x -цикла может быть выбрана произвольно (а остальной порядок посещения вершин определен однозначно), что влечет умножение на n . Наконец, упорядоченный набор из n вершин, общих для обоих множителей, может быть выбран $|I_1 \cap I_2|^n + o(L^n)$ способами. Следовательно, вклад произведения внедиагональных множителей в коэффициент при L^{k+l} равен

$$\sum_{n=2}^{\min(k,l)} n \binom{k}{n} \binom{l}{n} \left(\frac{|I_1 \cap I_2|}{L} \right)^n \gamma^{k+l-n} \quad (2.5.10)$$

(множитель γ^{k+l-n} возникает, поскольку у нас есть ровно $k + l - n$ диагональных ∂ -операторов (∂ -петель в графе)).

Объединяя (2.5.9) и (2.5.10), мы получаем утверждение леммы.

2.5.3 Доказательство предложения 2.5.1

Пусть $\rho = (\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_{l(\rho)})$ — разбиение. В алгебре $\mathbb{C}[x_{ij}, \partial_{ij}]$, $i, j \in \mathcal{I}$, элементам $p_{\rho, I}^{\#}$ соответствуют дифференциальные операторы

$$D_{\mathcal{I}}(p_{\rho, I}^{\#}) = \sum_{i_1, \dots, i_{|\rho|} \in \mathcal{I}; \alpha_1, \dots, \alpha_{|\rho|} \in \mathcal{I}} x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_{|\rho|} i_{|\rho|}} \partial_{\alpha_1 i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{\alpha_{|\rho|} i_{\sigma(|\rho|)}},$$

где σ — произвольная перестановка из $S(|\rho|)$ с цикловой структурой ρ (см. раздел 2.3.1).

Заметим, что

$$\langle D_{\mathcal{I}}(p_{\rho, \mathcal{I}}^{\#}) \rangle = \gamma^{|\rho|} |I|^{l(\rho)} L^{|\rho|} = \gamma^{|\rho|} \left(\frac{|I|}{L} \right)^{l(\rho)} L^{|\rho|+l(\rho)}.$$

Пусть $wt(\rho) := |\rho| + l(\rho)$ обозначает *вес* разбиения ρ . Для перестановки σ с цикловой структурой ρ также определим $wt(\sigma) := |\rho| + l(\rho)$. Если $|\mathcal{I}| = O(L)$, то $\langle D_{\mathcal{I}}(p_{\rho, \mathcal{I}}^{\#}) \rangle$ пропорционально $L^{wt(\rho)}$ при $L \rightarrow \infty$.

Напомним, что элементы $p_{\rho, \mathcal{I}}^{\#}$ образуют линейный базис в $Z(\mathfrak{gl}(I))$. Поэтому для доказательства предложения 2.5.1 асимптотическую гауссовость достаточно проверить только для наборов этих элементов.

Зададим произвольные разбиения $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}$. Пусть

$$\mu_j := D_{\mathcal{I}} \left(p_{\rho^{(j)}, \mathcal{I}_j}^{\#} \right) - \left\langle D_{\mathcal{I}} \left(p_{\rho^{(j)}, \mathcal{I}_j}^{\#} \right) \right\rangle, \quad 1 \leq j \leq r,$$

и пусть

$$C_{\mu}(i, j) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \mu_i \mu_j \rangle}{L^{wt(\rho^{(i)}) + wt(\rho^{(j)}) - 2}}$$

— асимптотические ковариации этих величин (существование которых будет следовать из рассуждений ниже).

Предложение 2.5.3.

$$\frac{\langle \mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \rangle}{L^{wt(\rho^{(1)}) + wt(\rho^{(2)}) + \dots + wt(\rho^{(r)}) - r}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & r \text{ — нечетно,} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{PM}(r)} \prod_{i=1}^{r/2} C_{\mu}(\sigma(2i-1), \sigma(2i)), & r \text{ — четно.} \end{cases}$$

Предложение 2.5.1 следует непосредственно из этого утверждения. При $l(\rho^{(i)}) = 1$, $1 \leq i \leq r$, предложение 2.5.3 совпадает с уже доказанным предложением 2.5.2.

Доказательство предложения 2.5.3 проходит по той же схеме, что и доказательство предложения 2.5.2. Сформулируем две леммы, обобщающие леммы 2.5.1 и 2.5.2.

Лемма 2.5.4. *Зададим оператор вида*⁴

$$D = \left(x_{i_1^1 i_1^1}^{k_1^1} \cdots x_{i_{l_1}^1 i_{l_1}^1}^{k_{l_1}^1} \partial_{i_1^1 i_1^1}^{k_1^1} \cdots \partial_{i_{l_1}^1 i_{l_1}^1}^{k_{l_1}^1} - (\gamma L)^{k_1^1 + \cdots + k_{l_1}^1} \right) \cdots \\ \left(x_{i_1^s i_1^s}^{k_1^s} \cdots x_{i_{l_s}^s i_{l_s}^s}^{k_{l_s}^s} \partial_{i_1^s i_1^s}^{k_1^s} \cdots \partial_{i_{l_s}^s i_{l_s}^s}^{k_{l_s}^s} - (\gamma L)^{k_1^s + \cdots + k_{l_s}^s} \right). \quad (2.5.11)$$

Пусть

$$\text{cov}(D) = |\{i_k^j, 1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq l_j\}|.$$

Тогда верно

$$\langle D \rangle = O \left(L^{\sum_{j=1}^s (\text{wt}(k^j) - 1) - \text{cov}(D)} \right),$$

причем выполнено также и

$$\langle D \rangle = O \left(L^{\sum_{j=1}^s (\text{wt}(k^j) - 1) - \text{cov}(D) - 1} \right),$$

если набор носителей $\{\{i_1^j, \dots, i_{l_j}^j\}, 1 \leq j \leq s\}$ нельзя разбить на дизъюнктные пары, где в каждой паре носители имеют непустое пересечение.

Лемма 2.5.5. *Пусть $C(1), \dots, C(m)$ — мономы вида*

$$C(l) = x_{\alpha_1^l i_1^l} \cdots x_{\alpha_{k_l}^l i_{k_l}^l} \partial_{\alpha_1^l i_{\sigma_l(1)}^l} \cdots \partial_{\alpha_{k_l}^l i_{\sigma_l(k_l)}^l},$$

$$\sigma_l \in S(l), \quad 1 \leq l \leq m; \quad k_1, \dots, k_m \geq 1;$$

причем в $C(l)$ имеется по крайней мере один символ x_{ab} или ∂_{ab} с $a \neq b$. Предположим, что моном $M := C(1) \cdots C(m)$ регулярен. Тогда

$$\text{cap}(M) \leq \sum_{j=1}^m (\text{wt}(\sigma_j) - 1) - \text{cov}(M).$$

Доказательства лемм 2.5.4 и 2.5.5 приведены ниже. Докажем предложение 2.5.3, используя эти леммы.

Запишем μ_j в виде

$$\mu_j = \mu_j^{\text{diag}} + \mu_j^{\text{off-diag}}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

⁴В выражении 2.5.11 и ниже обозначения k_b^a, i_a^b и ρ_a^b являются индексами, в то время как x^a и ∂^b обозначает возведение в соответствующую степень.

где

$$\mu_j^{diag} = \sum_{i_1, \dots, i_{l_j}} \left(x_{i_1 i_1}^{\rho_1^j} \dots x_{i_{l_j} i_{l_j}}^{\rho_{l_j}^j} \dots \partial_{i_1 i_1}^{\rho_1^j} \dots \partial_{i_{l_j} i_{l_j}}^{\rho_{l_j}^j} - (\gamma L)^{\rho_1^j + \dots + \rho_{l_j}^j} \right), \quad l_j := l(\rho^{(j)}),$$

и $\mu_j^{off-diag}$ состоит из остальных слагаемых выражения

$$\mu_j = D_{\mathcal{I}}(p_{\rho^j, I_j}^{\#}) - |I_j|^{l_j} (\gamma L)^{|\rho^j|}.$$

Раскроем скобки в произведении

$$\mu_1 \dots \mu_r = (\mu_1^{diag} + \mu_1^{off-diag}) \dots (\mu_r^{diag} + \mu_r^{off-diag}),$$

после чего в каждом члене также раскроем скобки, получая сумму по объединенному набору индексов. Слагаемыми в этой сумме будут произведения множителей двух типов, описанных в леммах 2.5.4 и 2.5.5. Будем называть такие множители диагональными и внедиагональными, соответственно.

Рассмотрим слагаемые, для которых носители диагональных и внедиагональных множителей не пересекаются. Оценки лемм 2.5.4 и 2.5.5 показывают, что вклад такого слагаемого в $\langle \mu_1 \dots \mu_r \rangle$ есть $O(L^{\sum(wt(\rho^j)-1)-cov})$ в случае, если носители множителей разбиваются на дизъюнктные пары, и $O(L^{\sum(wt(\rho^j)-1)-cov-1})$ в противном случае. Суммирование по индексам добавляет $O(L^{cov})$, и в итоге мы получаем, что полный вклад таких слагаемых есть

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{PM}(r)} \langle \mu_{i_1} \mu_{i_2} \rangle \dots \langle \mu_{i_{r-1}} \mu_{i_r} \rangle + O(L^{\sum(wt(\rho^j)-1)-1}),$$

поскольку легко видеть, что

$$\langle \mu_1 \mu_2 \rangle = \langle \mu_1^{diag} \mu_2^{diag} \rangle + \langle \mu_1^{off-diag} \mu_2^{off-diag} \rangle.$$

Рассмотрим теперь слагаемое, у которого носители диагональных и внедиагональных элементов пересекаются, и докажем, что общий вклад таких слагаемых есть $O(L^{\sum(wt(\rho^j)-1)-cov-1})$. Назовем два множителя этого слагаемого *связанными*, если их носители имеют непустое пересечение. Рассмотрим связанную компоненту, в которую входят и диагональные, и внедиагональные множители. Найдем в этой компоненте

диагональный множитель, при удалении которого не возникает компонент связности, состоящих из одного диагонального множителя (легко видеть, что такой элемент существует), и удалим его.

В произведении оставшихся множителей оценим емкость внедиагональных элементов с помощью леммы 2.5.5, вклад не связанных с ними диагональных — с помощью леммы 2.5.4, а вклад диагональных множителей, связанных с внедиагональными, как $O(L^{deg})$. При этом количество точек носителей диагональных множителей, связанных с внедиагональными, которые не лежат в носителях внедиагональных множителей, не превосходит $\sum_j (l(\rho^j) - 1)$, где суммирование происходит по индексам, соответствующим таким диагональным множителям. Таким образом, вклад оставшихся множителей есть $O(L^{\sum (wt(\rho^j) - 1) - cov})$, где сумма берется по соответствующим разбиениям, а cov — это число элементов в объединении покрытий этих множителей.

Вернем теперь удаленный диагональный множитель обратно. Пусть он соответствует разбиению ρ . Тогда к носителю произведения добавляется не более $l(\rho) - 1$ точек. Раскроем скобки в этом множителе, и по правилам (2.5.6) будем комmutировать все x_{jj} из этого множителя налево, а все ∂_{jj} — направо. При этом возникает несколько новых слагаемых. Вклад в среднее от члена, в котором не произошло ни одного взаимного уничтожения x_{jj} и ∂_{jj} , сокращается с вкладом от $-(\gamma L)^{|\rho|}$ из вставленного множителя. С другой стороны, в членах, возникших при взаимном уничтожении, уменьшается количество диагональных операторов ∂_{jj} во внедиагональных множителях или диагональных множителях, с ними связанных. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, мы получаем, что среднее всего слагаемого оценивается как

$$O(L^{\sum_{j=1}^r (wt(\rho^j) - 1) - cov - 1}),$$

где cov — носитель всего слагаемого. Это завершает доказательство утверждения.

Доказательство леммы 2.5.4.

Достаточно доказать лемму в предположении, что множители D нельзя разбить на две группы с непересекающимися носителями. Следовательно,

$$\text{cov}(D) \leq \sum_{j=1}^s (l_j - 1) + 1,$$

и

$$\sum_{j=1}^s (\text{wt}(k^j) - 1) - \text{cov}(D) \geq \sum_{j=1}^s |k^j| - 1.$$

Значит, нам достаточно доказать, что

$$\langle D \rangle = O\left(L^{\sum(|k^j|-1)}\right)$$

при $s = 2$, и

$$\langle D \rangle = O\left(L^{\sum(|k^j|-2)}\right)$$

для $s \geq 3$. Далее доказательство в точности аналогично доказательству леммы 2.5.1.

Доказательство леммы 2.5.5.

Доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство леммы 2.5.2. Введем некоторые определения, обобщающие определения из доказательства леммы 2.5.2.

Назовем *полным l -кратным циклом степени k* граф, отвечающий моному вида

$$x_{\alpha_1 i_1} \cdots x_{\alpha_k i_k} \partial_{\alpha_1 i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\alpha_k i_{\sigma(k)}}, \quad (2.5.12)$$

с носителем, состоящим из $2k$ различных вершин и с произвольной перестановкой $\sigma \in S(k)$, у которой ровно l циклов.

Назовем *l -кратным циклом степени k* граф, отвечающий моному вида (2.5.12), но с более слабым условием $E_x \cup E_\partial \neq \emptyset$. Любой такой граф может быть получен из полного l -кратного цикла некоторой идентификацией вершин.

Назовем *l -кратным x -циклом* l -кратный цикл, который возникает из l -кратного полного цикла следующим образом. В каждой из $l-1$ -ой связной компоненты все вершины склеиваются в одну вершину, а оставшаяся l -ая компонента после склеивания вершин должна образовывать x -цикл.

Будем называть *l -кратным ∂ -циклом* l -кратный цикл, вершины в каждой из $l-1$ связных компонент которого склеены в одну, а оставшаяся l -ая компонента образует ∂ -цикл.

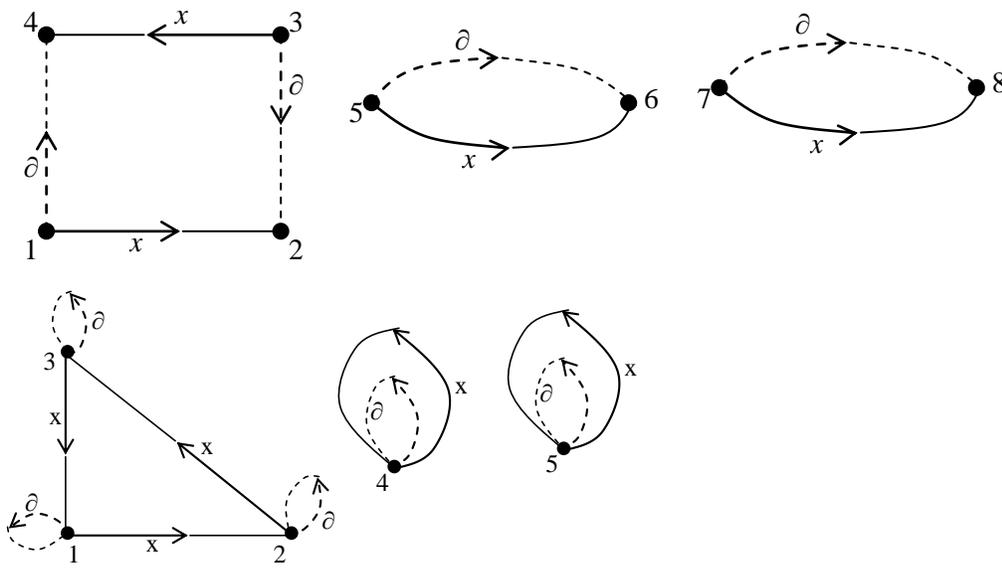


Рис. 2.7: полный 3-кратный цикл степени 4 (вверху) и 3-кратный x -цикл степени 5 (внизу).

Примеры введенных понятий см. на рисунке 2.7.

Регулярной склейкой l -кратного ∂ -цикла и l -кратного x -цикла назовем такую идентификацию их вершин, что замкнутые невырожденные цепи ∂ -ребер и x -ребер накладываются друг на друга, а других склеиваний не происходит. Обозначим символом $\#_R$ эту регулярную склейку.

Сформулируем лемму, обобщающую лемму 2.5.3.

Лемма 2.5.6. Пусть задан набор кратных циклов $C(1), \dots, C(n)$ с кратностями l_1, \dots, l_n . Предположим, что граф

$$G = C(1)\#C(2)\dots\#C(n)$$

∂ -регулярен. Тогда

$$|V(G)| \leq |E_x(G)| + \sum_{i=1}^n (l_i - 1),$$

и равенство достигается в том и только в том случае, когда существует дизъюнктное разбиение

$$\{1, 2, \dots, n\} = \{i_1 < i_2\} \sqcup \{i_3 < i_4\} \cdots \sqcup \{i_{2k-1} < i_{2k}\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-2k}\},$$

такое что $C(i_1), \dots, C(i_{2k-1})$ — кратные ∂ -циклы, $C(i_2), \dots, C(i_{2k}), C(j_1), \dots, C(j_{n-2k})$ — кратные x -циклы, и выполнено

$$G = (C(i_1)\#_R C(i_2)) \sqcup \dots \sqcup (C(i_{2k-1})\#_R C(i_{2k})) \sqcup C(j_1) \sqcup \dots \sqcup C(j_{n-2k}).$$

Доказательство. Будем доказывать эту лемму индукцией по n .

База. При $n = 1$ граф G можно получить из l -кратного полного цикла склейкой вершин. Проведем сначала склеивание вершин внутри каждой из l компонент, а потом у разных компонент. На первом этапе, аналогично случаю $n = 1$ в лемме 2.5.3, получаем, что в каждой из компонент, содержащих как минимум две вершины, $|V| \leq |E_x|$, а в компонентах, состоящих из одной вершины, выполнено $|V| = |E_x| + 1$ ($1 = 0 + 1$). Склеивание вершин из разных компонент уменьшает $|V|$ и не увеличивает $|E_x|$. Поскольку, по определению, не все компоненты кратных циклов содержат одну вершину, то утверждение доказано.

Индукционный переход.

Предположим, что лемма выполнена для

$$G_2 := C(2)\# \dots \# C(n).$$

Рассмотрим три случая, аналогичные трем случаям леммы 2.5.3:

- 1) Носители $C(1)$ и G_2 не пересекаются.
- 2) Происходит склейка по крайней мере одной вершины графов $C(1)$ и G_2 . В каждой из l_1 -ой компоненты $C(1)$ либо все вершины приклеиваются к графу G_2 , либо все не приклеиваются.
- 3) Имеется по крайней мере одна компонента $C(1)$, в которой часть вершин приклеиваются к вершинам G_2 , а часть — не приклеиваются.

Случай (1) рассматривается так же, как случай (1) в доказательстве леммы 2.5.3. В случае (2) рассмотрим связную компоненту $C(1)$, содержащую больше одной вершины. Если эта компонента не лежит в G_2 , то из ∂ -регулярности графа G следует, что она является ∂ -регулярным циклом, и лемма 2.5.3 при $n = 1$ дает оценку $|V| \leq |E_x|$ для этой компоненты. Если же эта компонента лежит в G_2 , то она не увеличивает число вершин в G по сравнению с G_2 , но может увеличивать число невырожденных

x -ребер. С другой стороны, одновершинные компоненты увеличивают $|V|$ не более, чем на 1 (и не меняют $|E_x|$). Суммируя по всем связным компонентам $C(1)$, мы получаем оценку

$$|V(G_1)| - |E_x(G_1)| \leq |V(G_2)| - |E_x(G_2)| + (l_1 - 1),$$

причем равенство возможно лишь при условиях

- а) $C(1)$ имеет $(l_1 - 1)$ одновершинную компоненту, которые не пересекаются с G_2 .
- б) Оставшаяся компонента графа $C(1)$ не имеет невырожденных x -ребер, а ее невырожденные ∂ -ребра обязаны накрывать x -ребра в G_2 .
- с) Для любых $a \neq b \in V(G_2)$, выполнено

$$|E_{\partial}^{ab}(C(1))| \leq |E_x^{ab}(G_2)| - |E_{\partial}^{ab}(G_2)|.$$

Индукционное предположение для G_2 и эти условия дают требуемую структуру для G_1 .

Наконец, рассмотрим случай (3). Доказательство случая (3) в лемме 2.5.3 показывает, что для любой связной компоненты в $C(1)$, частично пересекающейся с G_2 , выполнено строгое неравенство $|V| < |E_x|$. Для любой другой компоненты рассуждения из случая (2) показывают, что число вершин, которые она добавляет, не превосходит числа ее невырожденных ребер плюс один. Поэтому выполнено

$$|V(G_1)| - |E_x(G_1)| < |V(G_2)| - |E_x(G_2)| + l_1 - 1 \leq \sum_{i=1}^n (l_i - 1),$$

что завершает доказательство леммы 2.5.6.

Вывод леммы 2.5.5 из леммы 2.5.6 полностью совпадает с выводом леммы 2.5.2 из леммы 2.5.3.

2.5.4 Доказательство леммы 2.4.4

Для набора целых чисел $\vec{i} := (i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ будем обозначать символом $s(\vec{i})$ сумму этих чисел

$$s(\vec{i}) := \sum_{j=1}^{k+1} i_j,$$

и символом $n(\vec{i})$ число компонент вектора \vec{i} , которые строго больше 0. Каждому вектору \vec{i} однозначно сопоставляется разбиение $\rho(\vec{i})$, которое получается отбрасыванием всех нулевых компонент и упорядочиванием оставшихся компонент. Заметим, что

$$wt(\rho(\vec{i})) = s(\vec{i}) + n(\vec{i}).$$

Будем также считать, что $p_0^\# = 1$. По формуле (2.2.9), выполнено разложение

$$p_{k,I} = \frac{1}{k+1} \sum_{\vec{i}: s(\vec{i})+n(\vec{i})=k+1} \prod_{j=1}^{k+1} p_{i_j, I}^\# + \dots, \quad (2.5.13)$$

где точками обозначены слагаемые веса $\leq k$.

Известно (см. [26, Prop. 4.9]), что для любого разбиения $\rho = (k_1, k_2, \dots, k_{l(\rho)})$ выполнено

$$\mathbf{p}_\rho^\# = \prod_{j=1}^{l(\rho)} \mathbf{p}_{k_j}^\# + \dots, \quad (2.5.14)$$

где точками обозначены слагаемые веса $\leq wt(\rho) - 1$. Напомним, что $\{\mathbf{p}_\rho^\#\}$ образует линейный базис в алгебре сдвинуто-симметрических функций. Из (2.5.13) и (2.5.14) следует, что элемент $p_{k,I}$ раскладывается в линейную комбинацию $p_{\rho,I}^\#$ следующим образом:

$$p_{k,I} - \langle p_{k,I} \rangle = \sum_{\vec{i}: s(\vec{i})+n(\vec{i})=k+1} \left(p_{\rho(\vec{i}), I}^\# - \langle p_{\rho(\vec{i}), I}^\# \rangle \right) + \sum_{\rho: wt(\rho) \leq k} \left(p_{\rho, I}^\# - \langle p_{\rho, I}^\# \rangle \right). \quad (2.5.15)$$

Рассмотрим произведение

$$\langle (p_{k, I_1} - \langle p_{k, I_1} \rangle) (p_{l, I_2} - \langle p_{l, I_2} \rangle) \rangle,$$

подставим в него разложение (2.5.15) и раскроем скобки. Из предложения 2.5.1 следует, что

$$\left\langle \left(p_{\rho_1, I_1}^\# - \langle p_{\rho_1, I_1}^\# \rangle \right) \left(p_{\rho_2, I_2}^\# - \langle p_{\rho_2, I_2}^\# \rangle \right) \right\rangle = O(L^{wt(\rho_1) + wt(\rho_2)}).$$

Таким образом, вклад в старшую степень ковариации элементов p_{k, I_1} и p_{l, I_2} дают слагаемые вида

$$\left\langle \left(p_{\rho_1, I_1}^\# - \langle p_{\rho_1, I_1}^\# \rangle \right) \left(p_{\rho_2, I_2}^\# - \langle p_{\rho_2, I_2}^\# \rangle \right) \right\rangle, \quad (2.5.16)$$

в которых $wt(\rho_1) = k + 1$ и $wt(\rho_2) = l + 1$. Запишем элементы $p_{\rho, I}^\#$ в виде дифференциальных операторов. Напомним, что граф, отвечающий такому дифференциальному оператору, состоит из $l(\rho)$ связных компонент. Из доказательства леммы 2.5.6 следует, что вклад в старшую степень выражения (2.5.16) возникает в случае, когда по одной из связных компонент соответствующих графов имеют общий носитель, а остальные связные компоненты имеют непересекающиеся одноточечные носители. Пусть $\rho_1 = (k_1, k_2, \dots, k_{l(\rho_1)})$ и $\rho_2 = (m_1, m_2, \dots, m_{l(\rho_2)})$. Будем считать, что общий носитель имеют компоненты, отвечающие k_a и m_b . Тогда вклад, возникающий из взаимодействия этих компонент, равен ковариации элементов $p_{k_a, I_1}^\#$ и $p_{m_b, I_2}^\#$, а вклады остальных компонент равны их математическим ожиданиям. Это дает утверждение леммы 2.4.4.

Глава 3

Перемежающиеся

последовательности Керова и

случайные матрицы

3.1 Введение к главе 3

Рассмотрим две последовательности вещественных чисел $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$, таких что

$$x_1 \geq y_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq y_{n-1} \geq x_n. \quad (3.1.1)$$

Будем говорить, что такие последовательности $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$ *перемежаются*.

Определим число

$$z_0 = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^{n-1} y_j.$$

Следуя Керову, (см. [29]) определим *прямоугольную диаграмму Юнга* $w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x)$, однозначно задаваемую следующими условиями (см. рисунок 3.1):

1) $w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — это непрерывная кусочно-линейная функция, такая что $\frac{\partial}{\partial x} w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x) = \pm 1$, за исключением конечного числа точек, в которых эта функция достигает локальных экстремумов.

2) Точки $\{x_i\}_{i=1}^n$ являются локальными минимумами функции $w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x)$, точки $\{y_j\}_{j=1}^{n-1}$ являются локальными максимумами функции $w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x)$, и у этой функции

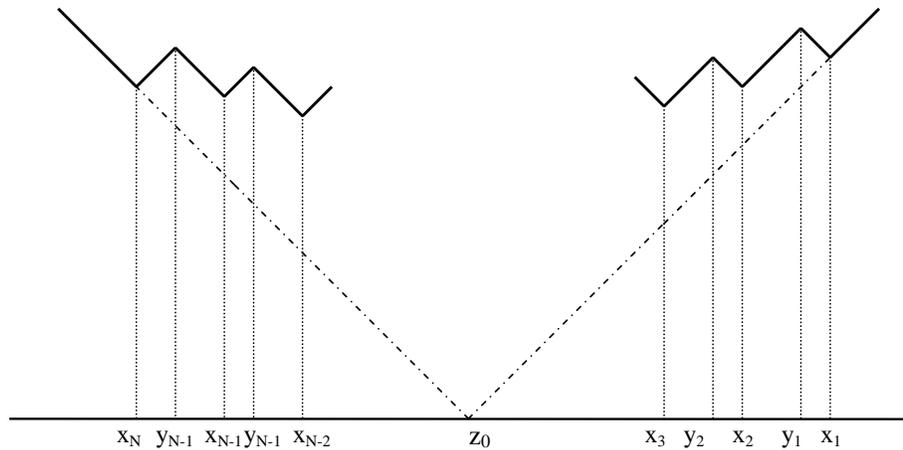


Рис. 3.1: Прямоугольная диаграмма Юнга

не существует других локальных экстремумов.

3) Для достаточно больших $|x|$ выполнено $w^{\{x_i\},\{y_j\}}(x) = |x - z_0|$.

Пусть S является вещественной симметричной матрицей размера $N \times N$. Символом \hat{S} обозначим ее подматрицу размера $(N - 1) \times (N - 1)$; она получается из S исключением N -ой строчки и столбца. Хорошо известно, что собственные значения матриц S и \hat{S} перемежаются (см., например, [25, р.185]). Таким образом, каждой симметрической матрице мы можем сопоставить прямоугольную диаграмму Юнга, построенную по собственным значениям S и \hat{S} .

Пусть $\{Z_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ — это семейство независимых, одинаково распределенных вещественных случайных величин с нулевым средним, таких что $\mathbf{E}Z_{11}^2 = 1$ и

$$\mathbf{E}|Z_{11}|^k < \infty, \quad \text{для всех } k = 1, 2, 3, \dots$$

Симметрическая $N \times N$ матрица X_N , определяемая с помощью формулы

$$X_N(i, j) = X_N(j, i) = Z_{ij}, \quad \text{для } i \leq j,$$

называется *матрицей Вигнера*. Пусть $w_N^X(x)$ — это прямоугольная диаграмма Юнга, построенная с помощью собственных значений матриц X_N и \hat{X}_N . Отметим, что $w_N^X(x)$ является случайной кусочно-линейной функцией. Нас интересует асимптотическое предельное поведение функции $w_N^X(x)$ при $N \rightarrow \infty$.

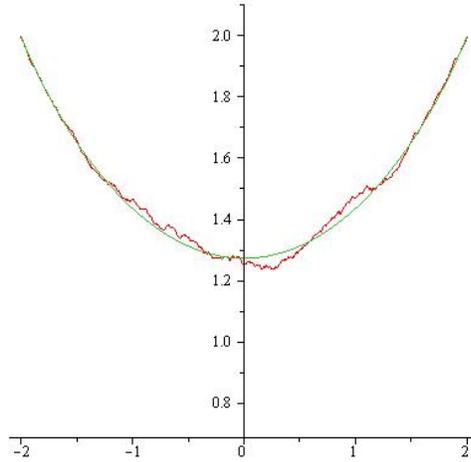


Рис. 3.2: Прямоугольная диаграмма Юнга $w_N(x)$ и $\Omega(x)$ для $N = 1100$

Пусть

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2} \right), & |x| \leq 2, \\ |x|, & |x| \geq 2, \end{cases}$$

— это кривая Вершика-Керова-Логана-Шеппа (см. [54] и [38]).

Теорема 3.1.1. *При $N \rightarrow \infty$ выполнено*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^X(x\sqrt{N}) - \Omega(x) \right| = 0, \quad \text{по вероятности.}$$

Замечание 2. Аналогичный результат (с аналогичным доказательством) верен и для комплексных эрмитовых матриц; в частности, он выполнен для гауссовского унитарного ансамбля.

Переменяющиеся последовательности возникают естественным образом в различных областях математики. Они предоставляют полезную систему координат для диаграмм Юнга (см. [33],[26]). Также они возникают как корни двух последовательных ортогональных многочленов (см. [30]). Более общее понятие *переменяющихся мер* было изучено в [32].

Впервые кривая $\Omega(x)$ возникла в контексте асимптотической теории представлений. Эта кривая является предельной формой случайной диаграммы Юнга, распределенной по мере Планшереля (см. подробности в [54], [38], [55], и [26, Глава

5]). После этого было показано, что кривая $\Omega(x)$ возникает в пределе при описании совместного предельного поведения корней двух последовательных ортогональных многочленов (см. [30]). Эта кривая также возникает как предельная кривая для эволюции непрерывных диаграмм Юнга (см. [31]), а также в теории случайных матриц. Мы сформулируем результат из [30], связанный с теорией случайных матриц.

Пусть $h_N \subset \mathbb{R}^N$ — случайная гиперплоскость, такая что $0 \in h_N$ и нормальный вектор к h_N равномерно распределен по единичной сфере. Пусть p — это проекционный оператор на h_N . Рассмотрим X_N как оператор в \mathbb{R}^N и рассмотрим также оператор pX_Np в пространстве h_N . Тогда собственные значения операторов X_N и pX_Np перемешаются. Построим прямоугольную диаграмму Юнга \tilde{w}_N по собственным значениям этих операторов.

Theorem ([30], Теорема 3.6). *При $N \rightarrow \infty$, выполнено*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{E} \tilde{w}_N(x\sqrt{N}) = \Omega(x), \quad (3.1.2)$$

при этом сходимость равномерна по $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. В контексте теоремы 3.1.1 мы рассматриваем ограничение на фиксированную гиперплоскость, в то время как в этом утверждении гиперплоскость случайна. Другая разница заключается в том, что в теореме 3.1.1 доказывается сходимость по вероятности, в то время как теорема (3.1.2) дает только сходимость математического ожидания.

Рассмотрим теперь матрицы Уишарта. Пусть $M = M(N)$ — это последовательность натуральных чисел, таких что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \geq 1.$$

Пусть W_N — это $N \times M(N)$ матрица со случайными независимыми одинаково распределенными элементами, и такая что

$$\mathbf{E}|W_N(1,1)|^k < \infty, \quad \text{для всех } k = 1, 2, 3, \dots$$

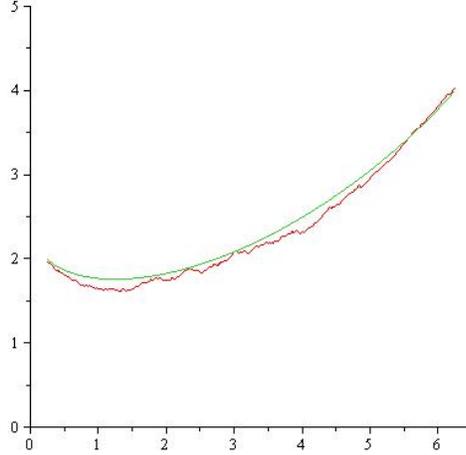


Рис. 3.3: Прямоугольная диаграмма Юнга $w_N^Y(x)$ и кривая $\Omega_\alpha(x)$ для $\alpha = 2.25$ и $N = 400$

Символом Y_N мы обозначаем Уишартову матрицу размера $N \times N$, то есть матрицу $Y_N = \mathcal{W}_N \mathcal{W}_N^t$. Пусть $w_N^Y(x)$ — это прямоугольная диаграмма Юнга, определяемая перемежающимися последовательностями Y_N и \hat{Y}_N .

Определим непрерывную функцию $\Omega_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть

$$\Omega_\alpha''(x) = \frac{x + (\alpha - 1)}{\pi x \sqrt{4\alpha - (x - (\alpha + 1))^2}}, \quad x \in [(\alpha + 1) - 2\sqrt{\alpha}; (\alpha + 1) + 2\sqrt{\alpha}],$$

и

$$\Omega_\alpha(x) = |x - \alpha|, \quad x \in (-\infty; (\alpha + 1) - 2\sqrt{\alpha}] \cup [(\alpha + 1) + 2\sqrt{\alpha}; \infty).$$

Эти формулы однозначно задают (детерминированную) функцию $\Omega_\alpha(x)$.

Теорема 3.1.2. *При $N \rightarrow \infty$, выполнено*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{N} w_N^Y(xN) - \Omega_\alpha(x) \right| = 0, \quad \text{по вероятности.}$$

Замечание 4. Предельные формы $\Omega_\alpha(x)$ тесно связаны с биановскими предельными формами (см. [6]). Взаимосвязь между этими объектами описана в разделе 3.5.

Замечание 5. Совместное распределение спектра миноров случайных матриц изучалось в многих статьях, см., например, [28], [1], [2], [8], [42]. Известно (см. [28]), что

собственные значения гауссовского унитарного ансамбля и его миноров образуют детерминантный процесс. Это дает другой метод для изучения кривой w_N^X и других связанных вопросов, как минимум в случае гауссовского унитарного ансамбля.

Замечание 6. С помощью метода моментов также должно быть возможным доказать центральную предельную теорему для глобальных флуктуаций кривых w_N^X и w_N^Y . Было бы интересно сравнить эту предельную теорему с результатами статей [26] и [40], а также с результатами статьи [8].

Эта глава организована следующим образом. В разделе 3.2 мы приводим некоторые предварительные сведения. В разделе 3.3 мы доказываем теорему 3.1.1. В разделе 3.4 мы доказываем теорему 3.1.2. В разделе 3.5 мы приводим взаимосвязь между полученными нами предельными формами и полукруговым распределением, а также распределением Марченко-Пастура.

3.2 Непрерывные диаграммы Юнга

Непрерывной диаграммой Юнга (см. [29]) называется функция $w(x)$ на \mathbb{R} , такая что

- 1) $|w(x_1) - w(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- 2) Существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$, называемая *центром* диаграммы w , такая что $w(x) = |x - x_0|$ при достаточно больших $|x|$.

Множество всех непрерывных диаграмм Юнга обозначается символом \mathcal{D} . Для любого $w \in \mathcal{D}$ мы определяем функцию $\sigma(x)$ по формуле

$$\sigma(x) = \frac{1}{2}(w(x) - |x|).$$

Поскольку функция $\sigma(x)$ удовлетворяет условию Липшица 1), ее производная $\sigma'(x)$ существует почти всюду и удовлетворяет неравенству $|\sigma'(x)| \leq 1$. Заметим, что функция $\sigma'(x)$ имеет компактный носитель. Функция $w(x)$ однозначно определяется по $\sigma'(x)$. Более того, $w(x)$ однозначно определяется по второй производной $\sigma''(x)$, которая понимается в смысле распределения.

Определим функцию $\tilde{p}_k : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, по формуле

$$\tilde{p}_k(w) = -k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \sigma'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \sigma''(x) dx.$$

Легко видеть, что для прямоугольной диаграммы Юнга $w^{\{x_i\}, \{y_j\}}(x)$ (см. раздел 3.1) мы имеем

$$\sigma''(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) - \sum_{j=1}^{n-1} \delta(x - y_j).$$

Нам будет нужен следующий факт.

Лемма 3.2.1 ([26], Лемма 5.7). Пусть $\mathcal{F}([a; b])$ — это множество всех вещественно-значных функций $f(x)$ с носителем на интервале $[a, b] \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$.

На множестве $\mathcal{F}([a; b])$ слабая топология, определяемая функционалами

$$f(x) \rightarrow \int_{x \in [a; b]} f(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

совпадает с топологией равномерной сходимости.

3.3 Доказательство теоремы 3.1.1

Лемма 3.3.1. Пусть w_N^X — случайная прямоугольная диаграмма Юнга, определяемая собственными значениями вигнеровских матриц X_N и \hat{X}_N (см. раздел 3.1).

Тогда

$$\frac{\tilde{p}_k(w_N^X)}{N^{k/2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & k \text{ — нечетно,} \\ \frac{k!}{(k/2)!(k/2)!}, & k \text{ — четно,} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

где сходимость понимается как сходимость по вероятности.

Доказательство. Доказательство этой леммы близко к доказательству теоремы Вигнера (см., например, [3, Section 2.1]) и основано на хорошо известном методе моментов.

Пусть $\{\lambda_i^N\}_{i=1}^N$ — это собственные значения X_N и пусть $\{\lambda_i^{N-1}\}_{i=1}^{N-1}$ — это собственные значения \hat{X}_N . Выполнено

$$\tilde{p}_k(w_N^X) = \int_{x \in \mathbb{R}} x^k \left(\sum_{i=1}^N \delta(\lambda_i^N) - \sum_{j=1}^{N-1} \delta(\lambda_j^{N-1}) \right) dx = \text{tr}(X_N^k) - \text{tr}(X_{N-1}^k).$$

Пусть $\mathbf{i}_N = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ пробегает множество мульти-индексов, таких что $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N$. Аналогичным образом, пусть $\mathbf{i}_{N-1} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ пробегает множество мульти-индексов, таких что $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(X_N^k) - \operatorname{tr}(X_{N-1}^k) &= \sum_{\mathbf{i}_N} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1) \\ &- \sum_{\mathbf{i}_{N-1}} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1) = \sum_{\mathbf{i}_N: N \in \mathbf{i}_N} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1), \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по индексам $\mathbf{i}_N = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, таким что существуют r , $1 \leq r \leq k$, с условием $i_r = N$.

Сначала мы посчитаем выражение

$$\mathbf{E} \left(\sum_{\mathbf{i}_N: N \in \mathbf{i}_N} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1) \right).$$

Эта сумма может быть записана как сумма слагаемых отвечающих определенным графам, которые в свою очередь ассоциированы с некоторыми словами. Предположим, что k нечетно; тогда в точности такие же оценки, как приведенные в [3, Lemma 2.1.6] показывают, что вклад этих слагаемых в степень n^k равен 0.

Предположим, что k четно; тогда максимальный вклад дается так называемыми *словами Вигнера* (см. [3, Опр. 2.1.10]). Число слов Вигнера равно $\frac{k!}{(k/2+1)!(k/2)!}$. Единственное отличие нашего случая от случая теоремы Вигнера заключается в том, что одна из вершин графа должна равняться N . Это условие дает дополнительный множитель $(k/2+1)$. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-k/2} \mathbf{E} \left(\sum_{\mathbf{i}_N: N \in \mathbf{i}_N} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1) \right) \\ = \begin{cases} 0, & k \text{ — нечетное,} \\ \frac{k!}{(k/2)!(k/2)!}, & k \text{ — четное.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Во-вторых, мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(N^{-k/2} \sum_{\mathbf{i}_N: N \in \mathbf{i}_N} X_N(i_1, i_2) X_N(i_2, i_3) \dots X(i_k, i_1) \right)^2 = 0. \quad (3.3.3)$$

Это равенство может быть доказано таким же образом, как и в [3, Лемма 2.1.7].

Из уравнений (3.3.2) и (3.3.3) следует, что наблюдаемые \tilde{p}_k сходятся к правой части уравнения (3.3.1) в L^2 и, следовательно, по вероятности.

□

Лемма 3.3.2 ([26] Предложение 5.3). *Выполнено*

$$\tilde{p}_k(\Omega) = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетно}, \\ \frac{k!}{(k/2)!(k/2)!}, & k - \text{четно}. \end{cases}$$

Лемма 3.3.3. *Существует отрезок $[-B; B]$, такой что вероятность выполнения неравенств*

$$-B < \lambda_N^N \leq \dots \leq \lambda_1^N < B$$

стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Это хорошо известный факт из теории случайных матриц, см., например, [3]. □

Пусть z_N — это центр прямоугольной диаграммы Юнга w_N^X . Ясно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z_N}{\sqrt{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X(N, N)}{\sqrt{N}} = 0, \quad \text{по вероятности.}$$

Это равенство и лемма 3.3.3 влекут сходимость w_N^X к $\Omega(x)$ вне отрезка $[-B; B]$.

Из лемм 3.3.1 и 3.3.2 для любого $k \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{p}_k(w_N^X)}{N^{k/2}} = \tilde{p}_k(\Omega), \quad \text{по вероятности.} \quad (3.3.4)$$

Сходимость w_N^X к $\Omega(x)$ на интервале $[-B; B]$ следует из уравнения (3.3.4) и леммы 3.2.1.

3.4 Доказательство теоремы 3.1.2

Лемма 3.4.1. *Пусть w_N^Y — это случайная прямоугольная диаграмма Юнга, определяемая собственными значениями унитаровских матриц Y_N и \hat{Y}_N (см. раздел 3.1).*

Тогда существует следующий предел

$$\frac{\tilde{p}_k(w_N^Y)}{N^k} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} m_k, \quad \text{по вероятности.} \quad (3.4.1)$$

Производящая функция последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ дается уравнением

$$G_{\alpha}(z) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k z^k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)z + 1}{\sqrt{(\alpha - 1)^2 z^2 - 2(\alpha + 1)z + 1}} \right).$$

Доказательство. Доказательство этой леммы основано на методе моментов и следует [3, Упражнение 2.1.18].

Пусть $\mathbf{i}_N = (i_1, i_2, \dots, i_N)$, $\mathbf{j}_N = (j_1, j_2, \dots, j_N)$ пробегает множество мульти-индексов, таких что $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_N \leq N$, $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_N \leq M(N)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k(w_N^Y) &= \text{tr}(Y_N^k) - \text{tr}(Y_{N-1}^k) = \sum_{\mathbf{i}_N: N \in \mathbf{i}_N} Y_N(i_1, i_2) Y_N(i_2, i_3) \dots Y_N(i_N, i_1) \\ &= \sum_{\mathbf{i}_N, \mathbf{j}_N: N \in \mathbf{i}_N} \mathcal{W}_N(i_1, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_2) \dots \mathcal{W}_N(i_k, j_k) \mathcal{W}_N(i_1, j_k), \end{aligned}$$

где условие $N \in \mathbf{i}_N$ означает, как и раньше, что существует число r , такое что $i_r = N$.

Равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(\text{tr}(Y_N^k) - \text{tr}(Y_{N-1}^k))^2}{N^{2k}} = 0$$

может быть доказано таким же образом, как и в [3, Раздел 2.1]. Следовательно, остается найти старший член асимптотики суммы

$$\mathbf{E} \left(\sum_{\mathbf{i}_N, \mathbf{j}_N: N \in \mathbf{i}_N} \mathcal{W}_N(i_1, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_1) \mathcal{W}_N(i_2, j_2) \dots \mathcal{W}_N(i_k, j_k) \mathcal{W}_N(i_1, j_k) \right). \quad (3.4.2)$$

Напомним, что *путем Дика* \mathcal{D}_l длины $2l$ называется последовательность целых чисел $\{S_n\}_{0 \leq n \leq 2l}$, такая что $S_0 = 0$, $S_{2l} = 0$, $|S(i) - S(i-1)| = 1$ для $1 \leq i \leq 2l$, и $S(i) \geq 0$ для $0 \leq i \leq 2l$. Пусть $a(\mathcal{D}_l)$ — это число индексов i , таких что $S(i) - S(i-1) = -1$ и $S(i-1)$ нечетно, и пусть $b(\mathcal{D}_l)$ — это число индексов i , таких что $S(i) - S(i-1) = -1$ и $S(i-1)$ четно. Ясно, что $a(\mathcal{D}_l) + b(\mathcal{D}_l) = l$.

Существует биективное соответствие между вигнеровскими словами и путями Дика (см., например, [3, Section 2.1]). Легко видеть, что основной вклад в сумму (3.4.2)

имеет порядок N^k и дается словами Вигнера длины $2k$ или, что эквивалентно, путями Дика длины $2k$. Если последовательность $(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k)$ является вигнеровским словом, то число $a(\mathcal{D}_k)$ равно числу различных j -индексов в этом наборе, а число $b(\mathcal{D}_k) + 1$ равно числу различных i -индексов в этом наборе, где \mathcal{D}_k — это соответствующий путь Дика. Таким образом, каждое слово дает вклад $(b(\mathcal{D}_k) + 1)\alpha^{a(\mathcal{D}_k)}$, и мы получаем

$$m_k = \sum_{\text{все } \mathcal{D}_k} (b(\mathcal{D}_k) + 1)\alpha^{a(\mathcal{D}_k)}. \quad (3.4.3)$$

Пусть β — это формальная переменная, и пусть

$$\begin{aligned} d_r &:= \sum_{\text{все } \mathcal{D}_r} \beta^{r-a(\mathcal{D}_r)} \alpha^{a(\mathcal{D}_r)}, & r \geq 1, & \quad d_0 = 1; \\ e_r &:= \sum_{\text{все } \mathcal{D}_r} \beta^{a(\mathcal{D}_r)} \alpha^{r-a(\mathcal{D}_r)}, & r \geq 1, & \quad e_0 = 1. \end{aligned}$$

Рассматривая момент первого возвращения пути Дика D_r в 0, мы получаем

$$d_r = \alpha \sum_{j=1}^r d_{r-j} e_{j-1}, \quad e_r = \beta \sum_{j=1}^r e_{r-j} d_{j-1}.$$

Следовательно,

$$d_r = \frac{\alpha}{\beta} e_r, \quad r \geq 1.$$

Мы имеем

$$d_r = \beta \sum_{j=2}^r d_{r-j} d_{j-1} + \alpha d_{r-1}. \quad (3.4.4)$$

Пусть $d(z)$ — это производящая функция последовательности $\{d_r\}$:

$$d(z) := 1 + \sum_{r=1}^{\infty} d_r z^r.$$

Используя (3.4.4), можно получить

$$d(z) = 1 + \beta z d(z)^2 + (\alpha - \beta) z d(z).$$

Решая это уравнение и выбирая знак согласно условию $d(0) = 1$, мы получаем

$$d(z) = \frac{1 - (\alpha - \beta)z - \sqrt{((\alpha - \beta)z - 1)^2 - 4\beta z}}{2\beta z}.$$

Используя (3.4.3), мы получаем

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k z^k = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta d(z))|_{\beta=1}.$$

Это завершает доказательство леммы 3.4.1. \square

Для параметра $\alpha > 1$ определим функцию $\Omega_\alpha(x)$ по формуле

$$\Omega_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left((2\alpha - x) \arcsin \left(\frac{\alpha+1-x}{2\sqrt{\alpha}} \right) - \arctan \left(\frac{(\alpha-1)^2 - x(\alpha+1)}{(\alpha-1)\sqrt{(x-\alpha)^2 + 2\alpha + 2x - 1}} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{2\alpha + 2x - 1 - (x - \alpha)^2} \right), & \text{для } x \in [\alpha + 1 - 2\sqrt{\alpha}; \alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha}]; \\ |x - \alpha|, & \text{для } x \in (-\infty; (\alpha + 1) - 2\sqrt{\alpha}] \cup [(\alpha + 1) + 2\sqrt{\alpha}; \infty), \end{cases}$$

и для $\alpha = 1$ пусть

$$\Omega_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left((x - 2) \arcsin \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) - \sqrt{4 - (x - 2)^2} \right) + \frac{x}{2}, & \text{для } x \in [0; 2]; \\ |x - 1|, & \text{для } x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty). \end{cases}$$

Легко видеть, что для параметра $\alpha \geq 1$, функция $\Omega_\alpha(x)$ является непрерывной диаграммой Юнга с центром в точке α .

Лемма 3.4.2. *Производящая функция последовательности $\{\tilde{p}_k(\Omega_\alpha)\}$ задается формулой*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{p}_k(\Omega_\alpha) z^k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)z + 1}{\sqrt{(\alpha - 1)^2 z^2 - 2(\alpha + 1)z + 1}} \right).$$

Доказательство. Напомним, что

$$\tilde{p}_k(\Omega_\alpha) = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{\Omega_\alpha''(x)}{2} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Прямое вычисление показывает, что при $\alpha \geq 1$ выполнено

$$\Omega_\alpha''(x) = \begin{cases} \frac{x + (\alpha - 1)}{\pi x \sqrt{4\alpha - (x - (\alpha + 1))^2}}, & x \in [\alpha + 1 - 2\sqrt{\alpha}; \alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha}], \\ 0, & x \notin [\alpha + 1 - 2\sqrt{\alpha}; \alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha}]. \end{cases}$$

Используя стандартный метод получения плотности меры из преобразования Стильтеса (см., например, [3, Section 2.4]) мы получаем утверждение леммы. \square

Пусть z_N^Y — это центр диаграммы w_N^Y . Заметим, что

$$\frac{z_N^Y}{N} = \frac{Y_N(N, N)}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{W}(N, j) \mathcal{W}(j, N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha, \quad \text{по вероятности.}$$

Это равенство означает, что центр диаграммы $\frac{1}{N} w_N^Y(Nx)$ сходится к центру диаграммы $\Omega(\alpha)$. Из лемм 3.4.1 и 3.4.2 следует, что

$$\frac{\tilde{p}_k(w_N^Y)}{N^k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_k(\Omega_\alpha), \quad \text{по вероятности.}$$

Известно, что собственные значения матрицы Уишарта расположены на интервале, длина которого не зависит от N , с вероятностью, стремящейся к 1. Теорема 3.1.2 следует из этих фактов таким же образом, как и при доказательстве теоремы 3.1.1.

3.5 Связь с полукруговым распределением и распределением Марченко-Пастура

В этом разделе мы кратко опишем взаимосвязь между предельными кривыми Ω и Ω_α и хорошо известными полукруговым распределением и распределением Марченко-Пастура, соответственно.

Для интервала I обозначим символом $\mathcal{M}(I)$ множество вероятностных мер с носителем на I . Для меры $\mu \in \mathcal{M}(I)$ обозначим

$$\mu_k := \int_I x^k d\mu, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathcal{D}(I)$ — это множество непрерывных диаграмм Юнга, таких что $\sigma''(x)$ имеет носитель внутри интервала I .

Лемма 3.5.1. *Существует биективное соответствие $\mu \rightarrow w$ между множествами $\mathcal{M}(I)$ и $\mathcal{D}(I)$. Оно задается соотношением*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k(w)}{k} z^k \right). \quad (3.5.1)$$

Доказательство. См. [29], [32]. □

Мера μ называется *переходной мерой* диаграммы w . Более подробно это соответствие описано в работах [29], [26, Глава 8].

Явное вычисление левой и правой части уравнения (3.5.1) ведет к следующему утверждению.

Предложение 3.5.1. *а) Полукруговой закон является переходной мерой непрерывной диаграммы Ω .*

б) Распределение Марченко-Пастура с параметром α является переходной мерой непрерывной диаграммы Ω_α .

Пункт а) был впервые замечен в работе [29].

В работе [6] Биан указал семейство кривых, возникающих в качестве предела в некоторой проблеме асимптотической теории представлений. Как было показано в работе [40], переходная мера этих кривых Биана совпадает с распределением Марченко-Пастура с точностью до гомотетии. Таким образом, кривые Ω_α и кривые Биана тесно взаимосвязаны.

Замечание 7. Пусть $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — это последовательность вещественных чисел, и предположим, что для любого n последовательности \mathbf{x}_n и \mathbf{x}_{n-1} перемежаются. Пусть μ — это вероятностная мера на \mathbb{R} и пусть $\delta(x)$ — мера Дирака в точке $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu, \quad \text{сходимость в слабой топологии.}$$

В работе [30] было показано, что существуют последовательности с различными предельными мерами μ , но одной и той же предельной формой для диаграммы $w^{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}}$. Таким образом, сходимость последовательности мер $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x_i)$ к мере μ может не влечь автоматически сходимость диаграммы $w^{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}}$ к непрерывной диаграмме Юнга с переходной мерой μ .

Литература

- [1] M. Adler, E. Nordenstam, and P. van Moerbeke, *The Dyson Brownian minor process*, arXiv:1006.2956, preprint.
- [2] M. Adler, E. Nordenstam, and P. van Moerbeke, *Consecutive Minors for Dyson's Brownian Motions*, arXiv:1007.0220, preprint.
- [3] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] J. Baik, P. Deift, K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 1119-1178
- [5] A. Berele and A. Regev. Hook Young diagrams with applications to combinatorics and representations of Lie superalgebras. *Advances in Mathematics* 64, 118-175 (1987)
- [6] P. Biane, *Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups*, Inter. Math. Res. Notices 2001 (2001), no. 4, 179–192.
- [7] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*, 1999.
- [8] A. Borodin. *CLT for spectra of submatrices of Wigner random matrices*, Preprint, 2010, arXiv:1010.0898.

- [9] А. Бородин, А. Буфетов, “Центральная предельная теорема для планшерелевского представления бесконечномерной унитарной группы”, Записки семинаров ПОМИ, 403 (2012), 19-34; 1.22 п. л. (вклад автора – 0.61 п. л.)
- [10] A. Borodin, A. Bufetov, “Plancherel representations of $U(\infty)$ and correlated Gaussian Free Fields”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 163, no. 11 (2014), 2109-2158; [arXiv:1301.0511](#); 4.2 п.л. (вклад автора – 2.1 п. л.)
- [11] A. Borodin, P.L. Ferrari. *Anisotropic growth of random surfaces in 2+1 dimensions*, Preprint, 2008, [arXiv:0804.3035](#).
- [12] A. Borodin and J. Kuan. *Asymptotics of Plancherel measures for the infinite-dimensional unitary group*, *Adv. Math.* 219 (2008), no. 3, 894-931, [arXiv:0712.1848](#) [math.RT]
- [13] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), 481-515
- [14] A. Borodin, G. Olshanski. *The boundary of the Gelfand-Tsetlin graph: a new approach*. Preprint, 2011, [arXiv: 1109.1412](#).
- [15] A. Borodin, G. Olshanski. *Asymptotics of Plancherel-type random partitions*. *Journal of Algebra*, 313 (2007), no. 1, 40-60.
- [16] A. Borodin, G. Olshanski, *Z-measures on partitions, Robinson-Schensted-Knuth correspondence, and $\beta = 2$ random matrix ensembles*. [math.CO/9905189](#).
- [17] A. Borodin, G. Olshanski. *Representation theory and random point processes*. European Congress of Mathematics, 73–94, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, [arXiv:math/0409333](#).
- [18] А. Буфетов, “Центральная предельная теорема для экстремальных характеров бесконечной симметрической группы”, *Функциональный анализ и его приложения*, 46:2 (2012), 3-16; 1.11 п. л.

- [19] A. Bufetov, “Kerov’s interlacing sequences and random matrices”, *Journal of Mathematical Physics*, 54 (2013), no. 11, 113302, arXiv:1211.1507; 0.94 п. л.
- [20] P. Cartier. *Introduction a l’etude des mouvements browniens a plusieurs parametres*. Seminaire de probabilites (Strasbourg), 5 (1971), p.58-75.
- [21] A. Edrei. *On the generating function of a doubly infinite, totally positive sequence*. Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 367-383.
- [22] V.Feray and P.L.Méliot. Asymptotics of q-Plancherel measures, arXiv:1001.2180, 2010
- [23] W.Fulton, Young tableaux. Cambridge University Press, 1997
- [24] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*. Springer, 2009.
- [25] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.
- [26] V. Ivanov and G. Olshanski. *Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams*. In Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives, volume 74 of NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, pages 93–151, 2002.
- [27] K. Johansson. *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure*. Ann. of Math. (2), 153:259–296, 2001.
- [28] K. Johansson and E. Nordenstam, *Eigenvalues of GUE minors*, Electron. J. Probab. 11(50):1342–1371, 2006.
- [29] S.V. Kerov. Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis. D Sci. thesis, 1993
- [30] S. Kerov, *Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials*, St. Petersburg Math. J. 5 (1994), 925-941.

- [31] S. Kerov, *The differential model of growth of Young diagrams*, Proc. St. Petersburg Math. Soc. 4 (1996), 167–194.
- [32] S. Kerov, *Interlacing measures*, In: Kirillov’s seminar on representation theory (G. Olshanski, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 35–83.
- [33] S. V. Kerov, *Anisotropic Young diagrams and Jack symmetric functions*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 34 (2000), no. 1, 51–64 (Russian); English translation: Funct. Anal. Appl. 34 (2000), 41–51.
- [34] S. V. Kerov and G. Olshanski. *Polynomial functions on the set of Young diagrams*. Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, Serie I, 319:121–126, 1994.
- [35] S.V.Kerov, A.Okounkov, and G.Olshanski. The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities. International Mathematics Research Notices, 1998(4):173, 1998.
- [36] S.V.Kerov, G.Olshanski, and A.M.Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. Invent.Math., 158:551-642, 2004
- [37] S.V.Kerov and A.M.Vershik, Asymptotics theory of characters of the symmetric group. Funct.Anal.Appl. 15 : 246-255, 1982
- [38] F. Logan and L. A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux*, Advances in Math. 26 (1977), 206–222.
- [39] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2nd edition, 1995.
- [40] P.L. Méliot. *Kerov’s central limit theorem for Schur-Weyl measures of parameter $1/2$* , Preprint, 2010, arXiv:1009.4034.
- [41] P.L. Méliot. *A Central Limit Theorem for the characters of the infinite symmetric group and of the infinite Hecke algebra*, Preprint, 2011, arXiv:1105.0091.

- [42] A. Metcalfe. *Universality properties of Gelfand-Tsetlin patterns*. Probab. Th. Rel. Fields, 155(1-2):303–346, 2013.
- [43] S. Mkrtchyan. *Entropy of Schur-Weyl Measures*. Preprint, 2011, arXiv:1107.1541.
- [44] A. Okounkov. *The uses of random partitions*. XIVth International Congress on Mathematical Physics, 379–403, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, arXiv:math-ph/0309015.
- [45] A. Okounkov, G. Olshanski. *Shifted Schur functions*, Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, 2, 73–146.
- [46] A. Okounkov and G. Olshanski, *Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity*. Intern. Math. Research Notices 1998 (1998), no. 13, 641–682; arXiv:q-alg/9709011.
- [47] G. Olshanski. *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe*. In: Representations of Lie groups and related topics. Advances in Contemp. Math., vol. 7 (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, editors). Gordon and Breach, N.Y., London etc. 1990, 269-463.
- [48] G. Olshanski. *Random permutations and related topics*. Chapter 25 of The Oxford Handbook of Random Matrix Theory (G. Akemann, J. Baik, P. Di Francesco, eds). Oxford Univ. Press 2011, arXiv:1104.1266.
- [49] A.Regev and T.Seeman. Shuffle-invariance of the super-RSK algorithm, Advances in Applied Mathematics, Vol.28, No. 1, 59-81, 2002
- [50] S. Sheffield. *Gaussian free fields for mathematicians*, Probability Theory and Related Fields, 2007, 139: 521–541.
- [51] C.Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences, Canadian Journal of Mathematics 13: 179–191, 1961
- [52] E.Thoma, Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe. Mat.Zeitschrift, 85:40-61, 1964

- [53] A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Characters and factor representations of the infinite unitary group*. Doklady AN SSSR 267 (1982), no. 2, 272–276 (Russian); English translation: Soviet Math. Doklady 26 (1982), 570–574.
- [54] A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux*, Doklady AN SSSR 233 (1977), no. 6, 1024–1027; English translation: Soviet Mathematics Doklady 18 (1977), 527–531.
- [55] A. M. Vershik, S. V. Kerov, *Asymptotic theory of characters of the symmetric group*, Function. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 4, 15–27; English translation: Funct. Anal. Appl. 15 (1985), 246–255.
- [56] S.V.Kerov and A.M.Vershik. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm. SIAM J.Alg.Disc.Meth., Vol.7, No. 1, 1986
- [57] D. Voiculescu. *Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$* . J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 1-20.
- [58] H. Weyl, *The classical groups. Their invariants and representations*. Princeton Univ. Press, 1939; 1997 (fifth edition).
- [59] D. P. Zhelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Nauka, Moscow, 1970 (Russian); English translation: Transl. Math. Monographs 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.