Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

На правах рукописи

ДЕВЯТОВ Ростислав Андреевич

Действия групп на компактных однородных пространствах с открытой орбитой

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент
Локтев Сергей Александрович

Москва — 2014 г.

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению действий различных групп с открытой орбитой на некоторых компактных однородных пространствах. Все алгебраические многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел.

Однородное пространство алгебраической группы G — это алгебраическое многообразие X, снабжённое транзитивным действием группы G. Основные результаты об однородных пространствах аффинных алгебраических групп содержатся в книгах [4] и [5]. Любое однородное пространство изоморфно (точнее, G-эквивариантно изоморфно) фактору группы G по некоторой подгруппе P (обычно обозначаемому G/P). В случае, когда группа G связна и редуктивна, можно показать, что многообразие G/P полно (или, что то же, компактно в классической топологии) тогда и только тогда, когда подгруппа P параболическая, т. е. содержит некоторую борелевскую подгруппу. В частности, в этом случае группа P содержит центр группы G, поэтому он тривиально действует на многообразии G/P, и многообразие G/P также является однородным пространством связной полупростой части группы G. Поэтому далее мы будем говорить о многообразиях вида G/P, где G — некоторая связная полупростая алгебраическая группа, а $P \subseteq G$ — некоторая параболическая подгруппа.

Компактными однородными пространствами являются многие классические и хорошо известные многообразия, такие как, например, проективные пространства и их произведения (многообразия Сегре), грассманианы и гладкие проективные квадрики. Более сложный пример однородных пространств — полные и частичные многообразия флагов, т. е. многообразия, параметризующие цепочки вложенных подпространств фиксированных размерностей в заданном векторном пространстве. Для всех перечисленных классов многообразий посчитаны их пространства когомологий и найдены клеточные разбиения [1]. Наличие действия связной редуктивной группы позволяет применять для изучения этих многообразий структурную теорию простых алгебр Ли.

Наличие действия определённой группы с открытой орбитой (или, как говорят, локально транзитивного действия) также является удобным инструментом для изучения свойств многообразий. Локально транзитивные действия представляют собой наиболее простой вид действий группы на многообразии после собственно транзитивных действий. Неформально говоря, если алгебраическая группа действует на неприводимом алгебраическом многообразии с открытой орбитой, то это действие позволяет "почти любую" точку многообразия перевести в "почти любую другую" точку. Различные классы многообразий, обладающих этим свойством, также хорошо изучены. К ним относятся, например, торические многообразия, т. е. нормальные алгебраические многообразия, на которых действует с открытой орбитой алгебраический тор. Основные сведения о торических многообразиях содержатся в книге [12]. Известна полная классификация торических многообразий, они параметризуются некоторыми комбинаторными (целочисленными) данными, а именно так называемыми рациональными полиэдральными веерами. Эта классификация позволяет, например, перечислить орбиты (их число конечно) и понять, как устроены замыкания орбит под действием тора и какие орбиты меньшей размерности в них содержатся. Более сложным примером многообразий, допускающих локально транзитивное действие некоторой группы, служат сферические многообразия, т. е. многообразия с действием связной редуктивной группы G, на которых (некоторая, или, что равносильно, любая) борелевская подгруппа действует с открытой орбитой. Торические многообразия являются частным случаем сферических. Сведения о сферических многообразиях собраны, например, в [10] и [20]. В случае сферических многообразий множество орбит борелевской подгруппы на самом деле также конечно.

1.2. Степень разработанности темы

Ясно, что сама группа G действует на многообразии G/P с открытой орбитой (и даже ровно с одной орбитой), но можно рассмотреть действие группы G на многообразии $(G/P)^n = G/P \times \ldots \times G/P$ и попытаться выяснить, имеет ли оно открытую орбиту и конечно ли множество орбит. Отметим, что многообразие $(G/P)^n$ также является однородным пространством связной полупростой алгебраической группы, а именно группы $G\times\ldots\times G$ (n прямых сомножителей). Неформально говоря, существование открытой орбиты означает, что "почти любой" набор из n точек многообразия G/P можно перевести в "почти любой другой" набор, а конечность множества орбит означает, что любой набор из n точек можно "привести к одному из конечного числа фиксированных видов".

Вопрос о существовании открытой орбиты для максимальной параболической подгруппы P был решён в работе [21], и в этой же работе был поставлен вопрос о существовании открытой орбиты для произвольных параболических подгрупп. Для формулировки полученных в этой работе результатов и для дальнейшего изучения этой задачи удобно ввести следующее определение.

Определение 1.1. Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимом алгебраическом многообразии X. Следуя [21], максимальное число $n \in \mathbb{N}$ (если оно существует), такое что группа G действует на многообразии X^n с открытой орбитой, назовём *максимальной степенью локальной транзитивности действия* $G : X$ и обозначим за $\operatorname{gtd}(G : X)$. Если действие $G : X^n$ не имеет открытой орбиты ни для какого $n \in \mathbb{N}$ (или, что равносильно, действие $G : X$ не имеет открытой орбиты), то назовём максимальной степенью локальной транзитивности действия $G : X$ число 0 ($\mathrm{gtd}(G : X) = 0$). Если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ группа G действует на многообразии X^m с открытой орбитой, будем говорить, что действие группы G на многообразии X *локально m-транзитивно*.

Используя это определение, можно сказать, что мы ищем максимальную степень локальной транзитивности действия связной редуктивной группы G на однородных пространствах вида G/P, где $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Другими словами, мы ищем такие числа n, что действие группы G на однородном пространстве G/P локально n-транзитивно.

Ясно, что действие группы G на однородном пространстве G/P всегда локально 1-транзитивно. Более того, из разложения Брюа следует, что если $B \subseteq G$ — борелевская подгруппа, содержащаяся в группе P, то число B-орбит на многообразии G/B конечно, и открытая орбита имеет вид BwB, где w — представитель элемента группы Вейля максимальной длины в нормализаторе максимального тора. Значит, группа P тем более действует на многообразии G/P с конечным числом орбит, и орбита PwP открыта. Следовательно, группа G действует на многообразии $G/P \times G/P$ с конечным числом орбит, и действие $G : G/P \times G/P$ 2-транзитивно. Более того, действие $G : G/P \times G/P$ 3-транзитивно тогда и только тогда, когда группа $P \cap wPw^{-1}$ действует на многообразии G/P с открытой орбитой.

В [21] доказано, что для связных простых групп G типа A и максимальных параболических подгрупп P максимальная степень локальной транзитивности может, в зависимости от группы G и подгруппы P, быть сколь угодно большой. Для связных простых групп G остальных типов и максимальных параболических подгрупп P она никогда не бывает больше 4. В связи с этим вопрос о нахождении максимальной степени локальной транзитивности для немаксимальных параболических подгрупп P в случаях, когда связная полупростая группа G содержит связные простые компоненты типа A, более сложен, чем тот же вопрос в случае, когда группа G не содержит связных простых компонент типа A, и остаётся, по-видимому, открытым. Для случая, когда группа G не содержит связных простых компонент типа A, максимальная степень локальной транзитивности вычисляется в диссертации.

Мы также рассмотрим вопрос о конечности числа орбит действия группы G на многообразии $(G/P)^n$. Этот вопрос легко сводится к случаю, когда группа G проста. Приведённые выше рассуждения показывают, что при $n = 1, 2$ множество орбит всегда конечно. Случаи связных простых групп G типа A и C рассматривались в работах [17] и [18], и для них вопрос о конечности числа орбит был решён полностью. (Точнее, в этих работах рассматривалась более общая задача о том, для каких наборов не обязательно одинаковых параболических групп $P^{(1)}, \ldots, P^{(n)}$ группы G группа G действует на многообразии $G/P^{(1)} \times \ldots \times G/P^{(n)}$ с конечным числом орбит.)

В общем случае этот вопрос оказывается связан с теорией сферических многообразий. Именно, известно, что если многообразие X с действием группы G сферическое, то (любая) борелевская подгруппа группы G действует на нём с конечным числом орбит, см. [2] и [9]. Таким образом, если многообразие $(G/P)^{n-1}$ сферическое, то группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит. Поэтому для поиска случаев, в которых множество орбит конечно, полезны результаты о том, что некоторое многообразие вида $(G/P)^{n-1}$ является сферическим. Такие результаты были получены, например, в работах [16] и [23]. Используя эти результаты, мы докажем, что если группа G действует на многообразии $(G/P)^n$, где $n \geq 3$, с конечным числом орбит, то на самом деле $n = 3$, а многообразие $G/P \times G/P$ сферическое.

Теперь обозначим m-мерную коммутативную унипотентную группу (или, что то же, группы векторов в векторном пространстве с операцией сложения) за $(\mathbf{G}_a)^m$. Действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (или, что то же, m-мерного векторного пространства, рассматриваемого как группа с операцией сложения) на различных многообразиях изучались в работе [13]. В отличие от ситуации, когда группа

G действует на многообразии G/P, для группы $(\mathbf{G}_a)^m$ нет никакого "естественного" действия на многообразии G/P, для которого можно было бы проверять наличие открытой орбиты, и (всевозможные) действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии $X = G/P$, как и (всевозможные) действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на других фиксированных многообразиях X удобно классифицировать с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия X и с точностью до автоморфизмов самой группы $(\mathbf{G}_a)^m$ как алгебраической группы (они совпадают с автоморфизмами группы $(\mathbf{G}_a)^m$ как m-мерного $\mathbb{C}$-векторного пространства, т. е. образуют группу GL_m). В этом смысле в работе [13] получена классификация таких действий на проективных пространствах и на поверхностях Хирцебруха. Там же была поставлена общая задача о классификации всех полных (компактных в классической топологии) m-мерных многообразий, допускающих локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ вместе с действием этой группы на них, по аналогии с тем, как это было ранее сделано с торическими многообразиями.

В работе [6] было доказано, что на на неособой m-мерной проективной квадратичной гиперповерхности (которая является однородным пространством группы SO_{m+2}) локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ ровно одно с точностью до автоморфизмов, упомянутых выше. Все такие пары (G, P), что существует хотя бы одно локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на однородном пространстве G/P (но не сами эти действия), были перечислены в работе [7]. Там же был поставлен вопрос о классификации локально транзитивных действий коммутативных унипотентных групп на грассманианах.

1.3. Цель работы

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, а $P \subset G$ — некоторая параболическая подгруппа. Тогда однородное пространство G/P является проективным многообразием, в частности, оно компактно в классической топологии. Выберем в группе G связные простые подгруппы $G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}$, так чтобы группа G была локально изоморфна их произведению (как иногда говорят, разложим группу G в почти прямое произведение связных простых подгрупп). Пусть $P^{(i)} = P \cap G^{(i)}$. Тогда подгруппы $P^{(i)}$ однозначно определяют подгруппу P.

В каждой простой группе $G^{(i)}$ выберем борелевскую подгруппу $B^{(i)} \subseteq P^{(i)}$ и максимальный тор $T^{(i)} \subset B^{(i)}$. Эти данные определяют систему корней $\Psi^{(i)}$ и множество простых корней $\Delta^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{\operatorname{rk} G^{(i)}}^{(i)}\}$. Группа $P^{(i)}$ является пересечением нескольких максимальных (по включению) параболических подгрупп, а все максимальные параболические подгруппы, содержащие группу $B^{(i)}$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с простыми корнями α_j. Пусть группа $P^{(i)}$ равна пересечению максимальных подгрупп, соответствующих корням $\alpha_{p_{i,1}}, \ldots, \alpha_{p_{i,k_p}}$. Таким образом, подгруппа P определяется конечным набором индексов $p_{1,1}, \ldots, p_{1,k_1}, \ldots, p_{s,1}, \ldots, p_{s,k_s}$. Заметим, что поскольку все борелевские подгруппы сопряжены, то это описание не зависит от выбора подгрупп $B^{(i)}$.

Цель работы — исходя из этого описания подгруппы P, ответить на следующие вопросы:

1. Предположим, что среди групп $G^{(i)}$ нет групп типа A. Для каких n группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой, т. е. локально транзитивно?

2. Для каких n группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит? (Группа G — любая связная полупростая.)

3. Как параметризуются локально транзитивные действия коммутативной унипотентной группы размерности $\dim(G/P)$ на многообразии G/P?

1.4. Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Для случаев, когда G — связная полупростая группа, не содержащая связных простых компонент типа A, получена полная классификация таких параболических подгрупп P и таких чисел $n \in \mathbb{N}$, что группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой.

2. Получена полная классификация троек (G, P, n), где G — связная полупростая алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа и $n \in \mathbb{N}$, таких что группа G действует на многообразии G/P с конечным числом орбит.

3. Получена полная классификация локально транзитивных действий m-мерной коммутативной унипотентной группы на многообразии G/P, где G — связная полупростая алгебраическая группа, P — её параболическая подгруппа и $m = \dim(G/P)$.

4. Пусть L — связная редуктивная алгебраическая группа, а V — её конечномерное представление. Получена полная классификация коммутативных ассоциативных умножений на пространстве V, таких что все операторы умножения нильпотентны и каждый оператор умножения совпадает с оператором действия некоторого элемента алгебры $\operatorname{Lie} L$.

1.5. Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего изучения компактных однородных пространств и эквивариантных компактификаций коммутативной унипотентной группы.

1.6. Методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории алгебр Ли и теории алгебраических групп.

1.7. Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертации обоснованы с помощью строгих математических доказательств. Основные результаты диссертации докладывались:

- На второй школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", механико-математический факультет МГУ, г. Москва (2011).

- На семинаре по алгебраической геометрии в Freie Universität Berlin, г. Берлин, Германия (2011).

- На совместном семинаре лаборатории Понселе и сектора алгебры и теории чисел ИППИ "арифметика, геометрия и теория кодирования", г. Москва (2014).

Глава 2

Предварительные сведения

2.1. Соглашения и обозначения

Если алгебраическая группа обозначена одной заглавной буквой, то её касательную алгебру Ли будем обозначать соответствующей готической буквой. Единичный элемент любой алгебраической группы H будем обозначать 1_H.

Все алгебры Ли, возникающие в дальнейшем, являются подалгебрами Ли в касательных алгебрах Ли редуктивных алгебраических групп H, и они будут рассматриваться вместе с этим вложением. Будем называть алгебру Ли $\mathfrak{a}$ *унипотентной*, если она является касательной алгеброй некоторой унипотентной алгебраической подгруппы группы H, или, что то же, если алгебра $\mathfrak{a}$ является подалгеброй в касательной алгебре (некоторой) максимальной унипотентной подгруппы группы H. Другими словами, если V — представление группы H с конечным ядром, то подалгебра $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ унипотентна тогда и только тогда, когда любой элемент алгебры $\mathfrak{a}$ действует на пространстве V нильпотентным оператором.

Если $\mathfrak{h}$ — простая алгебра Ли с выбранной картановской подалгеброй $\mathfrak{c}$, и $\alpha \in \mathfrak{c}^*$ — некоторый корень алгебры $\mathfrak{h}$, обозначим за $\mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{h}$ соответствующее корневое подпространство. Если $\alpha = 0$, обозначим $\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{c}$. Иначе, если $\alpha \in \mathfrak{c}^*$ не является корнем алгебры $\mathfrak{h}$ и $\alpha \neq 0$, обозначим $\mathfrak{h}_\alpha = 0$.

В разделах 3.2–3.3 и 4.2–4.5 мы фиксируем связную простую алгебраическую группу G, её борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальный тор $T \subset B$. Эти данные определяют систему корней $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$, подмножество положительных корней Φ^+ и подмножество простых корней $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}\}$. Здесь и далее простые корни перечисляются как в [8]. Обозначим также $\Phi^- = \Phi \setminus \Phi^+$.

Параболические подгруппы P, содержащие подгруппу B, можно параметризовать подмножествами $I \subseteq \Delta$, а именно, подмножество $I \subseteq \Delta$ соответствует такой параболической подгруппе P_I, что

$$\mathrm{Lie}\, P_I = \mathfrak{p}_I = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где подмножество $\Phi_I \subseteq \Phi^-$ состоит из всех отрицательных корней, разложение которых в линейную комбинацию простых корней *не содержит* корней $\alpha_i \in I$. В частности, максимальные параболические подгруппы задаются одноэлементными множествами I, $G = P_\varnothing$, $B = P_\Delta$. Будем коротко обозначать группу, соответствующую непустому множеству $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\}$, за $P_{i_1,\dots,i_k}$ вместо $P_{\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k}\}}$. Подгруппу P_i, где $1 \le i \le \mathrm{rk}\, G$, будем называть *$i$-й стандартной максимальной параболической подгруппой* группы G. Любая параболическая подгруппа сопряжена параболической подгруппе, содержащей группу B, и в разделах 3.2–3.3 и 4.2–4.5 мы также фиксируем параболическую подгруппу P, содержащую подгруппу B.

Для любой параболической подгруппы P, содержащей подгруппу B (в частности, для $P = B$), обозначим за P^- такую параболическую подгруппу, что

$$\mathfrak{p}^- = \mathrm{Lie}\, P^- = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha:\alpha\in\Phi \text{ и } \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Тогда группа $L = P \cap P^-$ связна и является подгруппой Леви в группе P. Будем называть её *стандартной* подгруппой Леви группы P, и будем также называть алгебру $\mathfrak{l}$ *стандартной* подалгеброй Леви алгебры $\mathfrak{p}$. Заметим, что подгруппа $B \cap L$ (соотв. $B \cap [L, L]$) борелевская в группе L (соотв. $[L, L]$), а $T \cap L \subset B \cap L$ (соотв. $T \cap [L, L] \subset B \cap [L, L]$) — максимальный тор в группе L (соотв. $[L, L]$). Получаем канонически определённые системы корней, множества положительных корней, решётки весов и подполугруппы доминантных весов для групп L и $[L, L]$.

Если $P = P_I$, где $I \subseteq \Delta$ — некоторое подмножество, то подгруппа U с касательной алгеброй

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha : \alpha \in \Phi^+ \text{ и } -\alpha \notin \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha$$

является унипотентным радикалом группы P, а подгруппа U^- с касательной алгеброй

$$\mathfrak{u}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^- \setminus \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha$$

является унипотентным радикалом группы P^-.

Обозначим за U_1 (соотв. U_1^-) унипотентный радикал группы B (соотв. B^-), и обозначим $\operatorname{Lie} U_1 = \mathfrak{u}_1$, $\operatorname{Lie} U_1^- = \mathfrak{u}_1^-$.

В разделах 4.3 и 4.4 группа L может быть произвольной связной редуктивной группой, она не обязательно является стандартной подгруппой Леви группы P.

Если H — связная редуктивная группа с фиксированной борелевской подгруппой, максимальным тором, решёткой весов и соответствующей этим данным полугруппой доминантных весов, обозначим неприводимое представление группы H со старшим весом λ за $V_H(\lambda)$. Аналогично, обозначим неприводимое представление алгебры $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} H$ со старшим весом λ за $V_{\mathfrak{h}}(\lambda)$. Будем писать $V(\lambda)$ вместо $V_H(\lambda)$ или $V_{\mathfrak{h}}(\lambda)$, если ясно, о какой алгебраической группе или алгебре Ли идёт речь. Если V — некоторое представление группы H, обозначим множество его весов за $\mathfrak{X}(V)$.

Обозначим грассманиан k-мерных подпространств в векторном пространстве V за $Gr(k, V)$. Будем обозначать абстрактное k-мерное проективное пространство за $\mathbf{P}^k$, а проективизацию векторного пространства V за $\mathbf{P}(V)$. Обозначим тождественный оператор на векторном пространстве V за id_V, и обозначим единичную $(k \times k)$-матрицу за id_k. Если $A_1, \dots, A_k$ — квадратные матрицы, будем обозначать блочно-диагональную матрицу с блоками $A_1, \dots, A_k$ за $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$ Если V и W — два векторных пространства (возможно, имеющие также структуру алгебры Ли или представления алгебры Ли), то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ всегда будет обозначать векторное пространство всех линейных отображений из пространства V в пространство W, они не обязаны быть гомоморфизмами алгебр Ли или эквивариантными относительно действия алгебры Ли.

Если в конечномерном векторном пространстве выбран базис, и базисные векторы обозначены некоторыми символами (например, $e_1, \dots, e_l$), то такими же символами со звёздочкой (например, $e_1^*, \dots, e_l^*$) будем обозначать соответствующий базис двойственного пространства. Если между пространствами V_1 и V_2 имеется невырожденное спаривание (например, пространство V_2 по определению равно V_1^* или V_1 и V_2 — два подпространства в пространстве W, и на пространстве W задана билинейная форма, устанавливающая такое невырожденное спаривание), и A — оператор на пространстве V_1, то сопряжённый оператор на пространстве V_2 будем обозначать A^*.

Если V — векторное пространство и W_1 и W_2 — два его подпространства, то будем говорить, что подпространство W_2 *дополнительно к подпространству* W_1, если $W_1 \cap W_2 = 0$ и $W_1 \oplus W_2 = V$.

Если на векторном пространстве V задано билинейное отображение (иногда мы будем называть его умножением) $V \times V \to V$, и $v \in V$, будем обозначать за μ_v оператор умножения слева на вектор v, т. е. $\mu_v \colon V \to V$, $\mu_v w = vw$.

2.2. Автоморфизмы однородных пространств

Поскольку в главе 4 мы изучаем действия коммутативной унипотентной группы на многообразии G/P, про которые изначально не предполагается, что они связаны с действием самой группы G, то нам будет полезно следующее определение.

Определение 2.1. Пусть X — алгебраическое многообразие. Алгебраическая группа H вместе с действием $H : X$ называется *категорной группой автоморфизмов многообразия* X, если для любой группы H_1, алгебраически действующей на X, существует единственный морфизм алгебраических групп $f\colon H_1 \to H$, такой что для любой точки $x \in X$ и для любого элемента $h \in H_1$ выполнено $h \cdot x = f(h) \cdot x$.

Ясно, что категорная группа автоморфизмов единственна с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с действием на многообразии X, если она существует. Обозначим категорную группу автоморфизмов многообразия X, если она существует, за $\mathrm{CAut}(X)$. Это понятие тесно связано с более общим понятием алгебраической группы, представляющей функтор.

Определение 2.2. Пусть $\mathscr{F}$ — контравариантный функтор из категории алгебраических многообразий на $\mathbb{C}$ в категорию (абстрактных) групп. Будем говорить, что алгебраическая группа H *представляет* функтор $\mathscr{F}$, если существует изоморфизм функторов $\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(-, H) \to \mathscr{F}$, где $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}$ обозначает абстрактную группу, состоящую из алгебраических морфизмов из алгебраического многообразия в алгебраическую группу. Здесь для любого алгебраического многообразия S, $\varphi(S)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(S, H) \to \mathscr{F}(S)$ — изоморфизм абстрактных групп, и групповая структура на множестве $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(S, H)$ понимается следующим образом: если $f, g\colon S \to H$ — два морфизма алгебраических многообразий, то их произведение определяется так: $(fg)(s) = f(s)g(s)$ для всех точек $s \in S$.

Пусть S и X — два алгебраических многообразия. Обозначим за $\mathrm{Aut}_S(S \times X)$ абстрактную группу, состоящую из всех таких автоморфизмов f многообразия $S \times X$, что существует морфизм $g\colon S \times X \to X$, такой что $f(s, x) = (s, g(s, x))$ для любых точек $s \in S$ и $x \in X$. Неформально говоря, эти автоморфизмы сохраняют слои проекции $S \times X \to S$.

Пусть дано алгебраическое многообразие X. Рассмотрим следующий контравариантный функтор из категории алгебраических многообразий в категорию абстрактных групп, который обозначим за $\mathscr{F}_X$. Если S — алгебраическое многообразие, то пусть $\mathscr{F}_X(S) = \mathrm{Aut}_S(S \times X)$. Если $h\colon S' \to S$ — морфизм алгебраических многообразий, то определим гомоморфизм абстрактных групп $\mathscr{F}_X(h)\colon \mathscr{F}_X(S) \to \mathscr{F}_X(S')$ следующим образом. Для любого автоморфизма $f \in \mathscr{F}_X(S) = \mathrm{Aut}_S(S \times X)$ существует морфизм $g\colon S \times X \to X$, такой что $f(s,x) = (s, g(s,x))$ для любых точек $s \in S$ и $x \in X$. Положим $((\mathscr{F}_X(h))(f))(s',x) = (s', g(h(s'),x))$ для любых точек $s' \in S'$ и $x \in X$. Прямым вычислением проверяется, что $\mathscr{F}_X(h)$ — это действительно гомоморфизм абстрактных групп.

Пусть дано алгебраическое многообразие X, и пусть алгебраическая группа H представляет функтор $\mathscr{F}_X$. Определим действие группы H на многообразии X следующим образом. Обозначим имеющийся изоморфизм функторов $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(-,H) \to \mathscr{F}_X$ за φ. Пусть id_H — тождественный автоморфизм группы H. Тогда $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(H,H)$ и $(\varphi(H))(\mathrm{id}_H) \in \mathrm{Aut}_H(H \times X)$. По определению это означает, что существует такой морфизм алгебраических многообразий $f\colon H \times X \to X$, что $((\varphi(H))(\mathrm{id}_H))(h,x) = (h, f(h,x))$ для любого элемента $h \in H$ и для любой точки $x \in X$. Положим $h \cdot x = f(h,x)$. Изначально не очевидно, почему это правило определяет действие группы, т. е. не очевидно, действительно ли $h_1 \cdot (h_2 \cdot x) = (h_1 h_2) \cdot x$ для любых элементов $h_1, h_2 \in H$ и для любой точки $x \in X$, но мы докажем это в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Пусть X — алгебраическое многообразие, и пусть алгебраическая группа H представляет функтор $\mathscr{F}_X$. Тогда описанное выше правило действительно задаёт действие группы H на многообразии X, и группа H с этим действием является категорной группой автоморфизмов многообразия X.*

Доказательство. Обозначим за $\{\mathrm{pt}\}$ многообразие, состоящее из одной точки. Для любого элемента $h \in H$ обозначим за $e_h\colon \{\mathrm{pt}\} \to H$ вложение, которое переводит точку $\mathrm{pt} \in \{\mathrm{pt}\}$ в точку $h \in H$. Поскольку φ — морфизм функторов, то $(\varphi(\{\mathrm{pt}\}))(e_h) \in \mathrm{Aut}_{\{\mathrm{pt}\}}(\{\mathrm{pt}\} \times X)$ — это тот автоморфизм многообразия $X = \{\mathrm{pt}\} \times X$, который переводит любую точку $(\mathrm{pt}, x) \in \{\mathrm{pt}\} \times X$ в $(\mathrm{pt}, f(e_h(\mathrm{pt}), x)) = (\mathrm{pt}, f(h, x))$. Для любых элементов $h_1, h_2 \in H$ произведение морфизмов e_{h_1} и e_{h_2} в группе $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(\{\mathrm{pt}\}, H)$ равно $e_{h_1h_2}$. Поскольку $\varphi(\{\mathrm{pt}\})$ — изоморфизм абстрактных групп, то $(\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_1})) \circ (\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_2})) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_1}e_{h_2}) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_1h_2})$. Следовательно, $(\mathrm{pt}, f(h_1, f(h_2, x))) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_1})(\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_2})(\mathrm{pt}, x)) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{h_1h_2})(\mathrm{pt}, x) = (\mathrm{pt}, f(h_1h_2, x))$, то есть правило $h \cdot x = f(h, x)$ действительно задаёт действие группы H на многообразии X.

Пусть теперь некоторая другая группа H_1 действует на многообразии X. Определим автоморфизм g многообразия $H_1 \times X$ следующим образом: $g(h, x) = (h, h \cdot x)$. Ясно, что $g \in \mathrm{Aut}_{H_1}(H_1 \times X)$. Обозначим $g_1 = (\varphi(H_1))^{-1}(g)$. Тогда, поскольку φ — изоморфизм функторов, для любого элемента $h \in H_1$ и для любой точки $x \in X$ имеем $(h, h \cdot x) = g(h, x) = \varphi(H_1)(g_1)(h, x) = (h, f(g_1(h), x)) = (h, g_1(h) \cdot x)$. Следовательно, $h \cdot x = g_1(h) \cdot x$. Остаётся проверить, что $g_1 \colon H_1 \to H$ — это гомоморфизм алгебраических групп (пока мы знаем только, что это морфизм алгебраических многообразий).

Зафиксируем два произвольных элемента $h_1, h_2 \in H_1$. Нужно проверить, что $g_1(h_1)g_1(h_2) = g_1(h_1h_2)$, или, что равносильно, что произведение морфизмов $e_{g_1(h_1)}$ и $e_{g_1(h_2)}$ в группе $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(\{\mathrm{pt}\}, H)$ равно $e_{g_1(h_1h_2)}$. Поскольку φ — изоморфизм, достаточно проверить, что $(\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_1)})) \circ (\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_2)})) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_1h_2)})$ в группе $\mathrm{Aut}_{\{\mathrm{pt}\}}(\{\mathrm{pt}\} \times X)$. Зафиксируем точку $x \in X$. Заметим сначала, что $f(g_1(h_1h_2), x) = g_1(h_1h_2) \cdot x = h_1h_2 \cdot x = h_1 \cdot (h_2 \cdot x) = g_1(h_1) \cdot (g_1(h_2) \cdot x) = f(g_1(h_1), f(g_1(h_2), x))$. Теперь мы можем сказать, что $\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_1h_2)})(\mathrm{pt}, x) = (\mathrm{pt}, f(g_1(h_1h_2), x)) = (\mathrm{pt}, f(g_1(h_1), f(g_1(h_2), x))) = \varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_1)})(\varphi(\{\mathrm{pt}\})(e_{g_1(h_2)})(\mathrm{pt}, x))$. Следовательно, $g_1 \colon H_1 \to H$ — гомоморфизм алгебраических групп.

Наконец, допустим, $g_2 \colon H_1 \to H$ — другой такой гомоморфизм алгебраических групп, что $h \cdot x = g_2(h) \cdot x$ для любого элемента $h \in H_1$ и для любой точки $x \in X$. Поскольку φ — морфизм функторов, имеем $\varphi(H_1)(g_2)(h, x) = (h, f(g_2(h), x)) = (h, g_2(h) \cdot x) = (h, h \cdot x) = (h, g_1(h) \cdot x) = \varphi(H_1)(g_1)(h, x)$. Поэтому в группе $\mathrm{Aut}_{H_1}(H_1 \times X)$ выполнено равенство $\varphi(H_1)(g_2) = \varphi(H_1)(g_1)$, и, поскольку φ — изоморфизм, то $g_1 = g_2$. $\square$

Если X — фактор связной полупростой алгебраической группы по параболической подгруппе, то функтор $\mathscr{F}_X$ всегда представим. Идея доказательства содержится, например, в [11], см. конец страницы 179 (первая страница в статье). Для удобства читателя, приведём подробное доказательство этого факта.

Лемма 2.4. *Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа, P — некоторая её параболическая подгруппа, $X = G/P$. Тогда функтор $\mathscr{F}_X$ представим.*

Доказательство. Если Y — некоторое алгебраическое многообразие, то обозначим его касательное расслоение за $\mathscr{T}Y$.

Известно (см. [15, глава V, теорема 1.4], что G/P — многообразие Фано, т. е. что наибольшая внешняя степень касательного расслоения на X (которую мы обозначим за $\mathscr{L} = \Lambda^m \mathscr{T}X$, где $m = \dim X$) обильна. Более того, на самом деле теорема 1.4 в [15, глава V] утверждает, что $\mathscr{L}$ — очень обильное расслоение, т. е. оно определяет вложение ι многообразия X в проективное пространство $\mathbf{P}(V)$, где $V = \Gamma(X, \mathscr{L})^*$. Пусть H — подгруппа в группе $PGL(V)$, состоящая из всех элементов, сохраняющих $\iota(X)$.

Заметим сначала, что $\iota(X)$ не может содержаться ни в каком собственном проективном подпространстве пространства $\mathbf{P}(V)$. Обратное означало бы, что существует ненулевая линейная функция v на пространстве V (т. е. $v \in \Gamma(X, \mathscr{L})$), которая обнуляется на всех таких векторах пространства V, которые определены (с точностью до умножения на скаляр) точками многообразия X. Иными словами, v — такое сечение расслоения $\mathscr{L}$, значение которого в слое над каждой точкой $x \in X$ может быть получено умножением базисного вектора в слое над точкой x на ноль. Но тогда v — нулевое сечение.

Следовательно, поскольку X — неприводимое многообразие, любое собственное проективное подпространство пространства $\mathbf{P}(V)$ пересекает многообразие $\iota(X)$ по подмногообразию меньшей размерности. Если некоторый элемент $h \in H$, $h \neq 1_H$, действует на многообразии $\iota(X)$ тривиально, то многообразие $\iota(X)$ содержится в объединении проективизаций собственных подпространств оператора h, т. е. многообразие $\iota(X)$ — объединение подмногообразий меньшей размерности, что невозможно. Следовательно, группа H действует на многообразии $\iota(X)$ эффективно.

Поскольку многообразие $\iota(X)$ не содержится ни в каком собственном проективном подпространстве пространства $\mathbf{P}(V)$, существуют $n = \dim V$ таких точек $x_1, \ldots, x_n \in X$, что прямые в пространстве V, соответствующие точкам $\iota(x_1), \ldots, \iota(x_n) \in \mathbf{P}(V)$, линейно порождают пространство V. Это означает, что значения любого сечения расслоения $\mathscr{L}$ в слоях над точками $x_1, \ldots, x_n$ однозначно определяют это сечение, и эти значения могут быть произвольными. В частности, мы можем выбрать n таких сечений $q_1, \ldots, q_n \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, что $q_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$ и $q_i(x_i) \neq 0$. Эти сечения образуют базис пространства $\Gamma(X, \mathscr{L})$.

Пусть сначала задан один автоморфизм a многообразия X. Обозначим m-ю внешнюю степень его дифференциала за δ_a. Тогда δ_a линейно отображает слой расслоения $\mathscr{L}$ над любой точкой $x \in X$ в слой над точкой $a(x)$. Обозначим это линейное отображение за $\delta_{a,x}$. Имеем следующий линейный оператор A на пространстве $\Gamma(X, \mathscr{L})$: если $q \in \Gamma(X, \mathscr{L})$, то для каждой точки $x \in X$ положим $(Aq)(x) = \delta_{a,x}^{-1} q(a(x))$. Прямое вычисление показывает, что ограничение проективизации оператора A^* на многообразие $\iota(X)$ совпадает с действием автоморфизма a на многообразии $\iota(X)$.

Будем доказывать, что группа H представляет функтор $\mathscr{F}_X$. Пусть S — произвольное алгебраическое многообразие. Определим гомоморфизм абстрактных групп $\varphi(S)\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(S,H) \to \mathrm{Aut}_S(S\times X)$ следующим образом. Если $f\colon S\to H$ — морфизм алгебраических многообразий, положим $\varphi(S)(f)(s,x) = (s, f(s)\cdot x)$ для всех точек $s\in S$, $x\in X$. Ясно, что $\varphi(S)$ — действительно гомоморфизм групп. Поскольку действие группы H на многообразии X эффективно, гомоморфизм $\varphi(S)$ инъективен.

Докажем сюръективность морфизма $\varphi(S)$. Пусть $g\colon S\times X \to S\times X$ — такой автоморфизм, что существует морфизм $g_1\colon S\times X \to X$, такой что $g(s,x) = (s, g_1(s,x))$. Тогда требуется найти морфизм $f\colon S\to H$, такой что $g_1(s,x) = f(s)\cdot x$. Обозначим за $\mathscr{T}_S(S\times X)$ подрасслоение касательного расслоения $\mathscr{T}(S\times X)$, состоящее из векторов, касательных к слоям проекции $S\times X\to S$. Обозначим $\mathscr{L}_S = \Lambda^m \mathscr{T}_S(S\times X)$, и обозначим слой расслоения $\mathscr{L}_S$ над точкой $(s,x)\in S\times X$ за $\mathscr{L}_{S,s,x}$. Ясно, что дифференциал автоморфизма g сохраняет расслоение $\mathscr{T}_S(S\times X)$. Тогда m-я внешняя степень этого дифференциала сохраняет расслоение $\mathscr{L}_S$. Другими словами, мы получили алгебраический автоморфизм δ_g линейного расслоения $\mathscr{L}_S$, который линейно отображает слой $\mathscr{L}_{S,s,x}$ в слой $\mathscr{L}_{S,s,g_1(s,x)}$ для любых точек $s\in S$, $x\in X$. Обозначим линейное отображение $\mathscr{L}_{S,s,x}\to \mathscr{L}_{S,s,g_1(s,x)}$, индуцированное автоморфизмом δ_g, за $\delta_{g,s,x}$.

Заметим также, что расслоение $\mathscr{L}_S$ изоморфно обратному образу расслоения $\mathscr{L}$ под действием канонической проекции $S\times X\to X$. Поэтому существуют n сечений q'_i расслоения $\mathscr{L}_S$, ограничения которых на любой слой вида $\{s\}\times X$, где $s\in S$, совпадают с q_i. Рассмотрим следующие n сечений q''_i расслоения $\mathscr{L}_S$: $q''_i(s,x) = \delta^{-1}_{g,s,x} q'_i(s, g_1(s,x))$ для любых точек $s\in S$, $x\in X$. Для любой точки $s\in S$ имеем автоморфизм многообразия X, заданный как $g_1(s,\cdot)$. Обозначим соответствующий линейный оператор на пространстве $\Gamma(X,\mathscr{L})$, построенный выше, за A_s. Тогда ограничение сечения q''_i на слой $\{s\}\times X$ равно $A_s q_i$. С другой стороны, сечение q''_i можно вычислить следующим образом. Для любого j ($1\le j\le n$) рассмотрим следующую функцию $b_{ij}\colon S\to\mathbb{C}$: $b_{ij}(s) = q''_i(s,x_j)/q'_j(s,x_j)$. Это алгебраическая функция на многообразии S, и она регулярна, поскольку $q_j(x_j)\ne 0$. Тогда $q''_i(s,x) = \sum_j b_{ij}(s) q'_j(s,x)$. Для каждой точки s обозначим за

$B(s)$ матрицу, составленную из чисел $b_{ij}(s)$. Тогда $B(s)$ — это матрица оператора A_s в базисе $\{q_i\}$ пространства $\Gamma(X, \mathscr{L})$. Следовательно, автоморфизм $g_1(s, \cdot)$ действует на многообразии $\iota(X)$ проективизацией оператора с матрицей $B(s)^*$. Обозначим эту проективизацию оператора за $f(s)$. Тогда $f\colon S \to PGL(V)$ — алгебраическая функция, для каждой точки $s \in S$ автоморфизм $f(s)$ сохраняет многообразие $\iota(X)$ (т. е. $f(s) \in H$), и действия автоморфизмов $f(s)$ и $g_1(s, \cdot)$ на многообразии $\iota(X)$ совпадают. Следовательно, гомоморфизм $\varphi(S)$ сюръективен.

Наконец, функториальность изоморфизма φ прямо следует из конструкции.

□

Сами группы, представляющие функторы $\mathscr{F}_{G/P}$, где P — параболическая подгруппа связной полупростой алгебраической группы G, были также вычислены в [11]. Для более общих классов многообразий X представимость функтора $\mathscr{F}_X$ изучалась, например, в работах [19] и [22] (с более сложными доказательствами).

Для комплексных многообразий вида G/P, где P — параболическая подгруппа связной полупростой комплексной группы Ли G, связные компоненты группы автоморфизмов (понимаемой в несколько другом смысле[1]) могут быть также вычислены топологическими методами, см. [5, глава 4, §15.4, теорема 2].

Чтобы описать группу, представляющую функтор $\mathscr{F}_{G/P}$, где P — параболическая подгруппа связной полупростой алгебраической группы G, начнём со следующего определения.

Определение 2.5. Пара (G, P), где G — связная простая алгебраическая группа, а $P \subseteq G$ — некоторая параболическая подгруппа, называется *исключительной*, если выполнено одно из следующих условий (здесь мы используем обозначения для параболических групп из раздела 2.1) :

1. G — группа типа C_l, подгруппа P сопряжена подгруппе P_1.

[1]Определение структуры группы Ли на группе автоморфизмов в [5] отличается от прямого аналога определения 2.1 здесь, см., например, [5, глава 1, начало §2.5] и [5, глава 1, §2.5, следствие 3], но в результате получаются те же самые группы (как группы Ли, а не как алгебраические группы, т. е. с классической топологией вместо топологии Зарисского).

2. G — группа типа B_l, подгруппа P сопряжена подгруппе P_l.

3. G — группа типа G_2, подгруппа P сопряжена подгруппе P_1.

4. $P = G$.

В противном случае пара (G, P) называется *неисключительной.*

Определение 2.6. Пусть G — присоединённая связная полупростая алгебраическая группа, а $P \subseteq G$ — некоторая параболическая подгруппа. Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}$ — разложение группы G в произведение связных простых подгрупп, и пусть $P^{(i)} = G^{(i)} \cap P$. Пара (G, P) называется *исключительной*, если хотя бы одна из пар $(G^{(i)}, P^{(i)})$ исключительная. В противном случае пара (G, P) называется *неисключительной.*

Лемма 2.7. *(см. [11, раздел 2]) Для любой исключительной пары (G, P), где G — присоединённая связная полупростая алгебраическая группа, а $P \subset G$ — некоторая параболическая подгруппа (подчеркнём, что здесь $G \neq P$), существует такая неисключительная пара (H, Q), где H — присоединённая связная полупростая алгебраическая группа, а $Q \subset H$ — некоторая параболическая подгруппа, что $G/P \cong H/Q$.*

Это утверждение было известно и раньше, поэтому мы не будем его здесь доказывать. Тем не менее, чтобы эту лемму можно было использовать для вычисления групп автоморфизмов однородных пространств вида G/P, где пара (G, P) может быть и исключительной, мы приведём краткое описание конструкции, позволяющей построить пару (H, Q) по паре (G, P) в лемме 2.7.

Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}$ — разложение группы G в произведение связных простых подгрупп, и пусть $P^{(i)} = G^{(i)} \cap P$. Тогда $G/P \cong G^{(1)}/P^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}/P^{(s)}$. Если $(G^{(i)}, P^{(i)})$ — неисключительная пара, то положим $H^{(i)} = G^{(i)}$, $Q^{(i)} = P^{(i)}$. Если $(G^{(i)}, P^{(i)})$ — исключительная пара, то определим пару $(H^{(i)}, Q^{(i)})$ следующим образом:

1. Если $G^{(i)} = PSp_{2l}$ (т. е. $G^{(i)}$ — группа типа C_l), где $l \geq 2$, и подгруппа P сопряжена первой стандартной максимальной параболической подгруппе группы $G^{(i)}$, то пусть $H^{(i)} = PSL_{2l}$, и пусть $Q^{(i)}$ — первая стандартная максимальная параболическая подгруппа группы $H^{(i)}$.

2. Если $G^{(i)} = SO_{2l+1}$ (т. е. $G^{(i)}$ — группа типа B_l), где $l \geq 2$, и подгруппа P сопряжена l-й стандартной максимальной параболической подгруппе группы $G^{(i)}$, то пусть $H^{(i)} = PSO_{2l+2}$, и пусть $Q^{(i)}$ — $(l+1)$-я стандартная максимальная параболическая подгруппа группы $H^{(i)}$.

3. Если $G^{(i)}$ — группа типа G_2, и подгруппа P сопряжена первой стандартной максимальной параболической подгруппе группы $G^{(i)}$, то пусть $H^{(i)} = SO_7$, и пусть $Q^{(i)}$ — первая стандартная максимальная параболическая подгруппа группы $H^{(i)}$.

4. Если $G^{(i)} = P^{(i)}$, то положим $H^{(i)} = Q^{(i)} = \{1\}$.

Во всех этих случаях $G^{(i)}/P^{(i)} = H^{(i)}/Q^{(i)}$. Наконец, пусть $H = H^{(1)} \times \ldots \times H^{(s)}$, $Q = Q^{(1)} \times \ldots \times Q^{(s)}$. Тогда $G/P \cong H/Q$, и (H, Q) — неисключительная пара.

Наконец, для неисключительных пар известна следующая теорема.

Теорема 2.8. *(см. [11, Theorem 1]) Пусть G — присоединённая связная полупростая алгебраическая группа, $P \subset G$ — некоторая параболическая подгруппа, и пусть пара (G, P) не является исключительной. Тогда группа H, представляющая функтор $\mathscr{F}_{G/P}$, удовлетворяет равенству $H^\circ = G$. Для любого многообразия S изоморфизм между $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}lg}(S, H)$ и $\mathrm{Aut}_S(S \times X)$ возникает очевидным способом из действия группы H на многообразии G/P, ограничение которого на подгруппу $H^\circ = G$ равно каноническому действию группы G на многообразии G/P.*

Следствие 2.9. *Пусть G — присоединённая связная полупростая алгебраическая группа, $P \subset G$ — некоторая параболическая подгруппа, и пусть пара*

(G, P) не является исключительной. Тогда группа $\mathrm{CAut}(G/P)$ существует, и $\mathrm{CAut}(G/P)^{\circ} = G$. Ограничение действия группы $\mathrm{CAut}(G/P)$ на многообразии G/P, требуемого в определении 2.1, на подгруппу $\mathrm{CAut}(G/P)^{\circ} = G$ совпадает с каноническим действием группы G на многообразии G/P.

Доказательство. Это прямо следует из теоремы 2.8 и леммы 2.3. $\square$

Глава 3

Действия на кратных однородных пространствах

В этой главе G — связная редуктивная группа, $P \subseteq G$ — некоторая параболическая подгруппа, $n \in \mathbb{N}$. Наша цель — найти все случаи, в которых группа G действует с открытой орбитой или с конечным числом орбит на кратном однородном пространстве $(G/P)^n$.

3.1. Сведение задачи к случаю простой группы G

Пусть сначала $\widetilde{G}$ — связная односвязная алгебраическая группа, локально изоморфная группе G, и $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ — односвязное накрытие. Тогда отображение π индуцирует биекцию между параболическими подгруппами $P \subseteq G$ и параболическими подгруппами $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{G}$, а именно $\widetilde{P} = \pi^{-1}(P)$, и изоморфизм $\widetilde{G}/\widetilde{P} \to G/P$. Кроме того, многообразие $\widetilde{G}/\widetilde{P}$ можно рассматривать как G-многообразие, поскольку ядро $\ker \pi$ действует на нём тривиально. В этом смысле изоморфизм $\widetilde{G}/\widetilde{P} \to G/P$ G-эквивариантен. Следовательно, для нахождения таких чисел n, что группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой, и для нахождения таких чисел n, что группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит, можно заменять группу G на её односвязную накрывающую, и наоборот.

Более того, центральный тор группы G содержится во всех её параболических подгруппах, поэтому для решения этих задач можно также считать, что группа G полупроста.

Далее, любая связная односвязная полупростая группа G изоморфна произведению $G^{(1)} \times \ldots \times G^{(k)}$, где группы $G^{(i)}$ связны и просты, и для любой параболической подгруппы $P \subseteq G$ существуют такие параболические подгруппы $P^{(i)} \subseteq G^{(i)}$, что $G/P \cong G^{(1)}/P^{(1)} \times \ldots \times G^{(k)}/P^{(k)}$ (именно, $P^{(i)} = P \cap G^{(i)}$). Произведение групп $G^{(1)} \times \ldots \times G^{(k)}$ действует на произведении многообразий $(G/P)^n \cong (G^{(1)}/P^{(1)})^n \times \ldots \times (G^{(k)}/P^{(k)})^n$ диагонально (покомпонентно). Поэтому G-орбиты на многообразии $(G/P)^n$ являются произведениями $G^{(i)}$-орбит на многообразии $(G^{(i)}/P^{(i)})^n$. G-орбита на многообразии $(G/P)^n$ открыта тогда и только тогда, когда она равна произведению k открытых $G^{(i)}$-орбит на многообразиях $(G^{(i)}/P^{(i)})^n$. Эти рассуждения доказывают следующую лемму.

Лемма 3.1. *В терминах введённых выше обозначений, группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой (соотв. с конечным числом орбит) тогда и только тогда, когда каждая из k групп $G^{(i)}$ действует на соответствующем многообразии $(G^{(i)}/P^{(i)})^n$ с открытой орбитой (соотв. с конечным числом орбит).* $\square$

Поэтому далее будем считать группу G простой. Напомним, что группу G можно заменять на её односвязную накрывающую и наоборот, следовательно, её можно заменять на любую группу, локально изоморфную группе G. Поэтому далее можно рассматривать только одну группу G из каждого класса локального изоморфизма.

3.2. Наличие открытой орбиты

Задача о нахождении максимальной степени локальной транзитивности действий $G : G/P$ в случае, когда G — связная простая алгебраическая группа, а P — *максимальная* параболическая подгруппа, была решена в работе [21]. Здесь и далее мы используем обозначения из раздела 2.1.

Теорема 3.2. *[21, Theorem 3] Пусть G — связная простая алгебраическая группа, $n \in \mathbb{N}$. Тогда диагональное действие группы G на кратном многообразии флагов $(G/P_i)^n$ локально транзитивно тогда и только тогда, когда $n \leq 2$ или тройка (G, n, i) перечислена в таблице 3.1.*

Таблица 3.1

Тип группы G	(n, i)
A_l	$n < \frac{(l+1)^2}{i(l+1-i)}$
$B_l, l \geq 3$	$n = 3, i = 1, l$
$C_l, l \geq 2$	$n = 3, i = 1, l$
$D_l, l \geq 4$	$n = 3, i = 1, l-1, l$
E_6	$n = 3, 4, i = 1, 6$
E_7	$n = 3, i = 7$

Для немаксимальных параболических подгрупп докажем следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, не являющаяся локально изоморфной группе SL_{l+1}, $P \subset G$ — некоторая немаксимальная параболическая подгруппа, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда диагональное действие группы G на кратном многообразии флагов $(G/P)^n$ локально транзитивно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий*

1. *$n \leq 2$.*

2. *$n = 3$ и пара (G, P) перечислена в таблице 3.2.*

Таблица 3.2

Тип группы G	P (с точностью до сопряжения)
$D_l, l \geq 5$ нечётно	$P_{1,l-1}, P_{1,l}$
$D_l, l \geq 4$ чётно	$P_{1,l-1}, P_{1,l}, P_{l-1,l}$

Доказательство. Пусть $P = P_I$. Заметим сначала, что если группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой, и $J \subseteq I$ — некоторое подмножество, то группа G действует с открытой орбитой также и на многообразии $(G/P_J)^n$. Действительно, поскольку $P \subseteq P_J$, имеем сюръективное G-эквивариантное отображение $G/P \to G/P_J$, определяемое как $gP \mapsto gP_J$. Оно индуцирует сюръективное G-эквивариантное отображение $\varphi\colon (G/P)^n \to (G/P_J)^n$, которое переводит открытую G-орбиту в многообразии $(G/P)^n$ в открытую G-орбиту в многообразии $(G/P_J)^n$. Аналогично, если группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с открытой орбитой и $m < n$, то на многообразии $(G/P)^m$ группа G также действует с открытой орбитой.

Таким образом, мы можем воспользоваться теоремой 3.2 и существенно сократить количество случаев параболических подгрупп, которые требуется рассмотреть. Именно, в случаях B_l, C_l и D_l при $n > 3$ открытой орбиты не может быть ни для какой параболической подгруппы. Если $n = 3$ и группа G имеет тип B_l и C_l, то достаточно рассмотреть подгруппу $P = P_{1,l}$. Если $n = 3$ и группа G имеет тип D_l, то открытая орбита может существовать только если $P = P_I$, $I \subseteq \{\alpha_1, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}$, т. е. нужно рассмотреть четыре случая. Как мы увидим, случай $P = P_{1,l-1}$ сводится к случаю $P = P_{1,l}$ В случае E_6 достаточно рассмотреть подгруппу $P = P_{1,6}$. Если бы в случае E_7 существовала такая немаксимальная параболическая подгруппа P, для которой на на многообразии $(G/P)^n$ имеется открытая G-орбита при $n \geq 3$, то единственная максимальная параболическая подгруппа, содержащая подгруппу P, была бы подгруппой P_7, но тогда подгруппа P сама была бы максимальной. В случаях E_8, F_4, G_2 открытой орбиты на многообразии $(G/P)^n$ при $n \geq 3$ нет ни для каких максимальных параболических подгрупп P, а значит для немаксимальных параболических подгрупп P открытой орбиты тоже нет.

Дальнейшее доказательство основано на следующем факте, доказанном в [21].

Предложение 3.4. *[21, Corollary 1 (ii) of Proposition 2] Пусть G — связная простая алгебраическая группа, P — некоторая её параболическая подгруппа, P^- — противоположная к ней параболическая подгруппа, $L = P \cap P^-$ — подгруппа Леви и $\mathfrak{u}^-$ — касательная алгебра унипотентного радикала группы P^-. Тогда если группы P и P^- сопряжены, то $\mathrm{gtd}(G : G/P) = 2 + \mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u}^-) = 2 + \mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u})$.*

Когда мы будем использовать это предложение, мы будем видеть, что группа L изоморфна некоторой "классической" или "хорошо известной" редуктивной группе (например, группе $\mathbb{C}^* \times GL_{l-1}$), и что алгебра $\mathfrak{u}$ (или $\mathfrak{u}^-$) как представление группы L изоморфна прямой сумме некоторых "хорошо известных" представлений этой "классической" группы. Точный список этих представлений зависит от того, как был выбран изоморфизм между группой L и "классической" редуктивной группой. Для полупростой части группы L, в терминах диаграмм Дынкина, он зависит от того, как именно диаграмма Дынкина, полученная из диаграммы Дынкина группы G (с перечислением вершин как в [8]) удалением вершин, соответствующих подгруппе P, отождествляется с диаграммой Дынкина полупростой части "хорошо известной" редуктивной группы. В тех случаях, когда это возможно, мы предпочитаем отождествлять их так, чтобы порядок вершин был в обоих случаях один и тот же. После этого нужно выбрать изоморфизм между центрами группы L и "хорошо известной" редуктивной группы (этот изоморфизм уже зафиксирован на пересечении центра и полупростой части, которое является конечной группой, но после этого всё равно может остаться несколько возможностей) и выбрать, какую из двух алгебр $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}^-$ рассматривать. Среди этих возможностей мы будем предпочитать ту, которая приводит к более простому списку L-модулей, например, к тому, чтобы в этом списке было больше тавтологических модулей, чем двойственных к тавтологическим или к тому, чтобы в нём было больше модулей с положительным $\mathbb{C}^*$-весом.

3.2.1. Группа G типа B_l, $l \geq 3$

Согласно теореме 3.2, достаточно рассмотреть случай подгруппы $P = P_{1,l}$. Поскольку схема Дынкина B_l не имеет автоморфизмов, элемент группы Вейля максимальной длины действует на системе корней как минус единичный оператор, и группа P сопряжена с группой P^-. Поэтому применимо предложение 3.4, и достаточно проверить, что $\operatorname{gtd}(L : \mathfrak{u}) = 0$, т. е. доказать, что действие группы L на алгебре $\mathfrak{u}$ не имеет открытой орбиты.

Будем считать, что $G = SO_{2l+1}$. Тогда $L = \mathbb{C}^* \times GL_{l-1}$, и алгебра $\mathfrak{u}$ как L-модуль может быть разложена в прямую сумму подмодулей $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5$. Здесь V_1 — GL_{l-1}-модуль $(\mathbb{C}^{l-1})^*$, двойственный к тавтологическому, и его $\mathbb{C}^*$-вес равен 1, V_2 — тривиальный GL_{l-1}-модуль с весом 1, V_3 — тавтологический GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с весом 0, V_4 — GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с весом 1, V_5 — GL_{l-1}-модуль $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-1}$ с весом 0. Компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}$ при таком разложении будем обозначать u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Заметим, что между модулями V_1 и V_4 имеется GL_{l-1}-инвариантное спаривание, $\mathbb{C}^*$-вес которого равен 2. Следовательно, рациональная функция

$$\frac{(u_1, u_4)}{u_2^2}$$

является непостоянным инвариантом для действия $L : \mathfrak{u}$, и действие группы G на многообразии G/P не локально 3-транзитивно.

3.2.2. Группа G типа C_l, $l \geq 3$

Этот случай полностью аналогичен предыдущему, и снова достаточно доказать, что на алгебре $\mathfrak{u}$ не существует открытой L-орбиты, где $L = P \cap P^-$ — подгруппа Леви в группе $P = P_{1,l}$, а $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли унипотентного радикала группы P.

Пусть $G = Sp_{2l}$. Тогда $L = \mathbb{C}^* \times GL_{l-1}$, и L-модуль $\mathfrak{u}$ можно разложить в прямую сумму $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$. Здесь V_1 — GL_{l-1}-модуль $(\mathbb{C}^{l-1})^*$, и его $\mathbb{C}^*$-вес равен 1, V_2 — GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с весом 1, V_3 — GL_{l-1}-модуль $S^2\mathbb{C}^{l-1}$ с весом 0, V_4 — тривиальный GL_{l-1}-модуль с весом 2. Будем обозначать компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}$ за u_1, u_2, u_3, u_4.

Значит, между модулями V_1 и V_2 имеется GL_{l-1}-инвариантное спаривание с $\mathbb{C}^*$-весом 2. Имеем непостоянный рациональный инвариант

$$\frac{(u_1, u_2)}{u_4}$$

для действия $L : \mathfrak{u}$, и действие $G : G/P$ не локально 3-транзитивно.

3.2.3. Группа G типа D_l, $l \geq 4$

В этом случае нужно рассмотреть следующие четыре параболические подгруппы: $P = P_{1,l-1}, P_{1,l}, P_{l-1,l}, P_{1,l-1,l}$. Легко видеть, что подгруппы P и P^- сопряжены во всех этих случаях, за исключением случаев, когда l нечётно, и подгруппа P равна одной из групп $P_{1,l}$ или $P_{1,l-1}$.

Будем считать, что $G = SO_{2l}$. Группа G обладает (диаграммным) автоморфизмом, меняющим корни α_{l-1} и α_l и сохраняющим борелевскую подгруппу и максимальный тор. Этот автоморфизм меняет местами подгруппы $P_{1,l}$ и $P_{1,l-1}$. Это означает, что действия $G : G/P_{1,l}$ и $G : G/P_{1,l-1}$ 3-транзитивны или не 3-транзитивны одновременно.

Пусть группа G действует в пространстве $\mathbb{C}^{2l}$ с базисом $e_1, \ldots, e_{2l}$, сохраняя билинейную форму $e_1^* \otimes e_{2l}^* + \ldots + e_l^* \otimes e_{l+1}^* + e_{l+1}^* \otimes e_l^* + \ldots + e_{2l}^* \otimes e_1^*$. Тогда в качестве борелевской подгруппы B можно взять группу всех верхнетреугольных матриц, лежащих в G. Чтобы устранить неоднозначность в том, какой из корней системы D_l назвать $(l-1)$-м простым корнем, а какой l-м, будем считать, что группа P_l состоит из всех элементов $h \in G$, сохраняющих линейную оболочку первых l базисных векторов.

3.2.3.1. $P = P_{l-1,l}$. В этом случае подгруппы P и P^- сопряжены, и достаточно найти максимальную степень локальной транзитивности $\mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u})$. Заметим сразу, что $\mathrm{gtd}(G : G/P_l) = 3$ по теореме 3.2, поэтому $\mathrm{gtd}(G : G/P) \le 3$, и $\mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u}) \le 1$.

Подгруппа Леви L изоморфна группе $\mathbb{C}^* \times GL_{l-1}$, и алгебра $\mathfrak{u}^-$ как L-модуль раскладывается в прямую сумму $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Здесь V_1 — GL_{l-1}-модуль $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-1}$, и его $\mathbb{C}^*$-вес равен 0, V_2 — GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с $\mathbb{C}^*$-весом 1 и V_3 — GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с $\mathbb{C}^*$-весом -1. Будем обозначать компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}$ за u_1, u_2, u_3.

Пусть l чётно. В этом случае оказывается, что открытая L-орбита на алгебре $\mathfrak{u}$ существует, и доказательство этого факта будет построено следующим образом. Мы начнём с произвольной точки $(u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{u}$. Затем на каждом шаге доказательства мы будем накладывать некоторое открытое L-инвариантное условие на эту точку и будем доказывать, что если все наложенные открытые условия выполнены, то точку (u_1, u_2, u_3) действием группы L можно перевести в некоторое меньшее (на каждом шаге всё меньшее и меньшее) подмножество алгебры $\mathfrak{u}$. (Точки этого подмножества автоматически будут удовлетворять наложенным открытым условиям, поскольку эти условия L-инвариантны.) В конце это множество станет одной точкой p, не зависящей от точки (u_1, u_2, u_3), и мы проверим, что эта точка p удовлетворяет всем тем открытым условиям, которые мы наложили. Последняя проверка необходима, чтобы убедиться, что пересечение множеств, удовлетворяющих всем наложенным открытым условиям, на самом деле непусто. Таким образом мы получим непустое L-инвариантное подмножество в алгебре $\mathfrak{u}$, и оно будет искомой открытой орбитой.

Выберем в тавтологическом GL_{l-1}-модуле базис $f_1, \dots, f_{l-1}$.

Поскольку $l-1$ нечётно, максимальный ранг (кососимметрического) тензора $w \in V_1$ равен $l-2$, и тензоры такого ранга образуют открытое подмножество. Это подмножество L-инвариантно, поэтому далее будем считать, что $\operatorname{rk} u_1 = l-2$. Тогда к точке $(u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{u}$ можно применить такой элемент группы GL_{l-1}, что тензор u_1 перейдёт в тензор $u_1' = f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4 + \ldots + f_{l-3} \wedge f_{l-2}$. Обозначим образ всей точки $(u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{u}$ под действием этого элемента за (u_1', u_2', u_3').

Любой тензор $w \in V_1$ ранга $l-2$ определяет (вырожденные) кососимметрические формы на пространствах V_2^* и V_3^*, ядра этих форм имеют размерность 1. Рассмотрим подпространство $X_w = (\ker w)^\perp \subset V_2$, на котором все линейные функции из этого ядра обращаются в ноль. Аналогично обозначим $Y_w = (\ker w)^\perp \subset V_2$. Условия $u_2 \notin X_{u_1}$ и $u_3 \notin Y_{u_1}$ открыты и L-инвариантны, и далее мы будем считать, что они выполнены. Тогда $u_2' \notin X_{u_1'}$, последняя координата вектора $u_2' \in V_2$ в выбранном выше базисе не равна нулю, и существует матрица вида

$$\begin{pmatrix} & & & * \\ & \mathrm{id}_{l-2} & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0. \tag{$*$}$$

которая переводит вектор u_2' в вектор $u_2'' = f_{l-1}$. Заметим, что любая матрица вида $(*)$ сохраняет тензор u_1'. Обозначим вектор, в который эта матрица переводит вектор u_3', за u_3''.

Далее, рассмотрим подгруппу группы L, состоящую из всех матриц вида

$$(\operatorname{diag}(A, \lambda), \lambda^{-1}), \quad A \in Sp_{l-2}, \lambda \neq 0.$$

Она сохраняет тензор u_1' и вектор u_2''. Выше мы предположили, что $u_3 \notin Y_{u_1}$, поэтому $u_3'' \notin Y_{u_1'}$, и последняя координата вектора u_3'' в выбранном выше базисе не может быть нулевой. С помощью подходящего выбора $\lambda \in \mathbb{C}$ вектор u_3'' можно перевести в вектор u_3''', последняя координата которого равна 1.

Наложим последнее L-инвариантное условие на точку (u_1, u_2, u_3). А именно, потребуем, чтобы вектор u_2 не был пропорционален вектору u_3. Тогда вектор u_3''' не пропорционален вектору u_2'', и хотя бы одна из первых $l-2$ координат вектора u_3''' не равна нулю. Поскольку группа Sp_{l-2} действует на множестве ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{C}^{l-2}$ транзитивно, то вектор длины $l-2$, составленный из первых $l-2$ координат вектора u_3''', можно перевести в f_1.

Таким образом, мы перевели тензор u_1 в тензор $f_1\wedge f_2+f_3\wedge f_4+\ldots+f_{l-3}\wedge f_{l-2}$, вектор u_2 в вектор f_{l-1} и вектор u_3 в вектор $f_1 + f_{l-1}$. Полученная точка $p \in \mathfrak{u}^-$ удовлетворяет наложенным открытым условиям, поэтому эти открытые условия определяют открытую L-орбиту на алгебре $\mathfrak{u}^-$, и $\mathrm{gtd}(L, \mathfrak{u}) = 1$.

Пусть l нечётно. Тогда в пространстве V_1 существует непустое открытое подмножество, элементы которого определяют невырожденные кососимметрические формы на GL_{l-1}-модуле $(\mathbb{C}^{l-1})^*$. Более того, каждый такой тензор u_1 определяет также и невырожденную кососимметрическую форму на тавтологическом GL_{l-1}-модуле, получаемую обращением матрицы. Обозначим эту форму за u_1^{-1}. Тогда следующая функция является рациональным L-инвариантом:

$$u_1^{-1}(u_2, u_3).$$

Следовательно, действие группы G на многообразии G/P не локально 3-транзитивно.

3.2.3.2. $P = P_{1,l}$**.** В этом случае предложение 3.4 применимо тогда и только тогда, когда l чётно.

Пусть l чётно. Как и в предыдущем случае, по теореме 3.2, $\mathrm{gtd}(G : G/P_l) = 3$, поэтому $\mathrm{gtd}(G : G/P) \leq 3$, и $\mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u}) \leq 1$. То есть для доказательства теоремы 3.3 достаточно доказать, что группа L действует на алгебре $\mathfrak{u}$ с открытой орбитой. Доказательство этого факта построено так же, как и в предыдущем случае для чётного l.

В этом случае снова $L = \mathbb{C}^* \times GL_{l-1}$, и L-модуль $\mathfrak{u}$ можно разложить в сумму трёх прямых слагаемых, $\mathfrak{u} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, но в этом случае V_1 — GL_{l-1}-модуль $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-1}$, и его $\mathbb{C}^*$-вес равен 0, V_2 — GL_{l-1}-модуль $\mathbb{C}^{l-1}$ с $\mathbb{C}^*$-весом 1, а V_3 — GL_{l-1}-модуль $(\mathbb{C}^{l-1})^*$ с $\mathbb{C}^*$-весом 1. Снова будем обозначать компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}$ за u_1, u_2, u_3.

Мы снова начинаем с точки $(u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{u}^-$. В этом случае группа L такая же, как и в предыдущем, и модули V_1 и V_2 тоже такие же, как и в предыдущем случае, поэтому мы можем использовать обозначение X_w, введённое выше для чётного l. Снова выберем в тавтологическом GL_{l-1} модуле базис $f_1, \ldots, f_{l-1}$.

Как и в предыдущем случае, начнём с наложения условия $\operatorname{rk} u_1 = l - 2$, и переведём (кососимметрический) тензор u_1 в тензор $u_1' = f_1 \wedge f_2 + \ldots + f_{l-3} \wedge f_{l-2}$. Пусть векторы u_2 и u_3 при этом переходят в векторы u_2' и u_3', соответственно. Также будем считать, что $u_2 \notin X_{u_1}$, и, также как и в предыдущем случае, сохраняя тензор u_1' неизменным, переведём вектор u_2' в вектор $u_2'' = f_{l-1}$. Обозначим вектор, в который теперь перешёл вектор u_3', за u_3''. Наконец, подгруппа группы L, состоящая из матриц вида $(\operatorname{diag}(A, \lambda), \lambda^{-1})$ (где $A \in Sp_{l-2}, \lambda \neq 0$), снова сохраняет тензор u_1' и вектор u_2''.

Между пространствами V_2 и V_3 имеется невырожденное GL_{l-1}-инвариантное спаривание, обозначим его за $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Будем считать, что $\langle u_2, u_3 \rangle \neq 0$. Тогда последняя координата вектора u_3'' в выбранном базисе не равна нулю. Наложим также L-инвариантное условие $u_3 \notin \ker u_1$, тогда среди первых $l - 2$ координат вектора u_3'' найдётся хотя бы одна ненулевая. С помощью подходящего выбора числа λ вектор u_3'' можно перевести в вектор, последняя координата которого равна 1, и с помощью подходящего выбора матрицы A этот вектор можно перевести в вектор $f_1^* + f_{l-1}^*$.

Итак, после всех проведённых операций тензор u_1 переходит в тензор $f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4 + \ldots + f_{l-3} \wedge f_{l-2}$, вектор u_2 переходит в вектор f_{l-1} и вектор u_3

переходит в вектор $f_1^* + f_{l-1}^*$. Мы снова получили точку p, удовлетворяющую всем наложенным открытым условиям, поэтому эти условия задают открытую L-орбиту на алгебре $\mathfrak{u}^-$.

Пусть l нечётно. Тогда предложение 3.4 неприменимо, и максимальную степень локальной транзитивности $\mathrm{gtd}(G : G/P)$ нужно найти напрямую. По теореме 3.2, $\mathrm{gtd}(G : G/P_l) = 3$, поэтому $\mathrm{gtd}(G : G/P) \leq 3$, и для доказательства теоремы 3.3 достаточно проверить, что группа G действует на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой. Мы будем пользоваться следующим хорошо известным фактом о локально транзитивных действиях.

Лемма 3.5. *Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимых алгебраических многообразиях W и Y, и пусть $f\colon W \to Y$ — некоторое G-эквивариантное отображение. Тогда:*

1. *Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *Действие группы G на многообразии W локально транзитивно, и образ $f(W)$ плотен в многообразии Y.*

   (b) *Действие группы G на многообразии Y локально транзитивно, и существует такая точка $y \in Y$, лежащая в открытой орбите, что её G-стабилизатор G_y действует на прообразе $f^{-1}(y)$ с плотной орбитой.*

2. *Пусть условия 1a и 1b выполнены. Если $y \in Y$ и $w \in f^{-1}(y)$ — такие точки, что орбиты $G \cdot y$ и $G_y \cdot w$ плотны в многообразиях Y и в $f^{-1}(y)$ соответственно, то орбита $G \cdot w$ плотна в многообразии W.* □

Группа G действует на многообразии G/P транзитивно, и из разложения Брюа следует, что группа P действует на многообразии G/P с конечным числом орбит, причём орбита точки wP, где w — представитель в нормализаторе $N_G(T)$ элемента группы Вейля максимальной длины, открыта. По лемме 3.5 (2), орбита $G \cdot (P, wP) \subseteq G/P \times G/P$ открыта. Стабилизатор точки (P, wP) равен

$P \cap wPw^{-1}$. Известно, что (в рассматриваемом случае, когда $G = SO_{2l}$, где l нечётно) $wP_1w^{-1} = P_1^-$ и $wP_lw^{-1} = P_{l-1}^-$, поэтому $G_{(P,wP)} = P_{1,l} \cap P_{1,l-1}^-$. Значит, по лемме 3.5 (1) достаточно проверить, что в многообразии G/P имеется плотная $(P_{1,l} \cap P_{1,l-1}^-)$-орбита. Обозначим $H = P_{1,l} \cap P_{1,l-1}^-$.

Напомним, что мы зафиксировали базис $e_1, \ldots, e_{2l}$ в пространстве $\mathbb{C}^{2l}$. Группа H состоит из всех элементов группы G, которые сохраняют следующие подпространства: $\langle e_1 \rangle, \langle e_1, \ldots, e_{2l-1} \rangle$ (сохраняются группой P_1), $\langle e_1, \ldots, e_l \rangle$ (сохраняется группой P_l), $\langle e_{2l} \rangle, \langle e_2, \ldots, e_{2l} \rangle$ (сохраняются группой P_1^-), $\langle e_l, e_{l+2}, e_{l+3}, \ldots, e_{2l} \rangle$ (сохраняется группой P_{l-1}^-).

Обозначим за $X' \subset Gr(l, \mathbb{C}^{2l})$ множество всех изотропных подпространств размерности l в пространстве $\mathbb{C}^{2l}$. Легко видеть, что множество X' распадается в несвязное объединение двух SO_{2l}-орбит, и группа O_{2l} меняет их местами. Если два подпространства лежат в одной и той же SO_{2l}-орбите, то они имеют ненулевое пересечение. Обозначим орбиту $SO_{2l}\langle e_1, \ldots, e_l \rangle \subset X'$ за X. Тогда X — неприводимое подмногообразие в грассманиане $Gr(l, \mathbb{C}^{2l})$. Обозначим множество всех изотропных прямых в проективном пространстве $\mathbf{P}(\mathbb{C}^{2l})$ за Y. Для любой точки $s \in X'$ обозначим за $Y_s \subset \mathbf{P}(\mathbb{C}^{2l})$ множество всех прямых, содержащихся в пространстве s. Ясно, что $W = \cup_{s \in X}(s \times Y_s)$ — замкнутое G-инвариантное подмножество в многообразии $Gr(l, \mathbb{C}^{2l}) \times \mathbf{P}(\mathbb{C}^{2l})$. Прямое вычисление показывает, что $G/P = W$.

Мы будем снова использовать лемму 3.5 (1) для проекции $\psi \colon W \to Y$ на вторую координату.

Сначала найдём открытую H-орбиту $Z \subseteq Y$ и какую-нибудь точку $b \in Z$. Мы будем определять множество Z, последовательно вводя открытые H-инвариантные условия, как выше. Выберем точку $a \in Y$. Выберем вектор $c = \sum_{i=1}^{2l} c_i e_i$ $(c_i \in \mathbb{C})$, так чтобы $\langle c \rangle = a$.

Предположим, что $a \not\subseteq \langle e_2, \ldots, e_{2l-1} \rangle$. Это подпространство H-инвариантно, поскольку оно равно пересечению H-инвариантных подпространств $\langle e_1, \ldots, e_{2l-1} \rangle$ и $\langle e_2, \ldots, e_{2l} \rangle$. Тогда $c_1 \neq 0$, $c_{2l} \neq 0$. Существует диагональная матрица $\mathrm{diag}(\lambda, \mathrm{id}_{2l-2}, \lambda^{-1}) \in H$, переводящая вектор c в вектор $c' = \sum c'_i e_i$, где $c'_1 = c'_{2l} \neq 0$. Не ограничивая общности (умножая исходный вектор c на подходящую константу), мы можем считать, что $c'_1 = c'_{2l} = 1$.

Теперь предположим, что $a \not\subseteq \langle e_1, \ldots, e_l, e_{l+2}, e_{l+3}, \ldots, e_{2l}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_l\rangle + \langle e_l, e_{l+2}, e_{l+3}, \ldots, e_{2l}\rangle$ (и это последнее условие, которое мы накладываем, чтобы определить множество Z). Тогда $c'_{l+1} \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 & -c'_2/c'_{l+1} & & & \\ & \mathrm{id}_{l-2} & & \vdots & \vdots & & \Large 0 & \\ & & & 0 & -c'_{l-1}/c'_{l+1} & & & \\ -c'_{2l-1} & \cdots & -c'_{l+2} & -c'_{l+1} & -c'_l - 1/c'_{l+1} & -c'_{l-1} & \cdots & -c'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1/c'_{l+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & -c'_{l+2}/c'_{l+1} & & & \\ & \Large 0 & & \vdots & \vdots & & \mathrm{id}_{l-2} & \\ & & & 0 & -c'_{2l-1}/c'_{l+1} & & & \end{pmatrix}.$$

действующую на пространстве $\langle e_2, \ldots, e_{2l-1}\rangle$. После подходящей перестановки базисных векторов эта матрица становится верхнетреугольной, поэтому $\det A = (-c'_{l+1})(-1/c'_{l+1}) = 1$. Прямым вычислением проверяется, что $\mathrm{diag}(1, A, 1) \in SO_{2l}$. Единственная нетривиальная проверка состоит в том, что вектор $\mathrm{diag}(1, A, 1)e_{l+1}$ изотропен. Его квадрат равен

$$2((-c'_2/c'_{l+1})(-c'_{2l-1}/c'_{l+1}) + \ldots + (-c'_{l-1}/c'_{l+1})(-c'_{l+2}/c'_{l+1})) + \\ 2(-c'_l - 1/c'_{l+1})(-1/c'_{l+1}) =$$

$$2(c'_2 c'_{2l-1} + \ldots + c'_l c'_{l+1} + 1)/(c'^2_{l+1}) = \\ 2(c'_2 c'_{2l-1} + \ldots + c'_l f'_{l+1} + c'_1 f'_{2l})/(c'^2_{l+1}) = 0,$$

поскольку вектор c' изотропен. Ещё одним прямым вычислением проверяется, что матрица $\mathrm{diag}(1, A, 1)$ переводи вектор c' в вектор $c'' = e_1 + e_l - e_{l+1} + e_{2l}$. Таким образом, любую прямую $a \in Z$ можно перевести в прямую $b = \langle e_1 + e_l - e_{l+1} + e_{2l}\rangle \in Z$.

Теперь рассмотрим действие стабилизатора H_b на прообразе $\psi^{-1}(b)$. В действительности нам будет достаточно рассмотреть действие группы H_b°. Сначала найдём простое описание для группы H_b и этого её действия.

Именно, докажем, что группа H_b изоморфна $GL_{l-2} \times \{1, -1\}$ и состоит из матриц вида $\mathrm{diag}(\lambda, (D^*)^{-1}, \lambda, \lambda, D, \lambda)$, где $D \in GL(\langle e_{l+1}, \ldots, e_{2l-1}\rangle)$ и $\lambda = \pm 1$. Ясно, что все такие матрицы лежат в группе H_b. Теперь рассмотрим произвольный элемент $g \in H_b$. Он сохраняет подпространства $\langle e_1\rangle$, $\langle e_{2l}\rangle$, $\langle e_l\rangle$ и b, поэтому он сохраняет и их сумму $\langle e_1, e_l, e_{l+1}, e_{2l}\rangle$. Поскольку $H\langle e_2, \ldots, e_{2l-1}\rangle = \langle e_2, \ldots, e_{2l-1}\rangle$, то элемент g сохраняет подпространство $\langle e_1, e_l, e_{l+1}, e_{2l}\rangle \cap \langle e_2, \ldots, e_{2l-1}\rangle = \langle e_l, e_{l+1}\rangle$. В частности, $ge_{l+1} = \lambda e_{l+1} + \mu e_l$ для некоторых чисел λ и μ, более того, $\lambda \neq 0$, иначе $gb \subset \langle e_1, e_l, e_{2l}\rangle$. Но если $\lambda \neq 0$, то $\mu = 0$, иначе вектор ge_{l+1} не может быть изотропным. Поэтому элемент g сохраняет подпространство $\langle e_{l+1}\rangle$. Поскольку $gb = b$, то g умножает каждый из векторов e_1, e_l, e_{l+1} и e_{2l} на одну и ту же константу. Поскольку $g \in SO_{2l}$, то эта константа может быть равна только ± 1. Наконец, поскольку $g\langle e_1, e_l, e_{l+1}, e_{2l}\rangle = \langle e_1, e_l, e_{l+1}, e_{2l}\rangle$, то g сохраняет подпространство $\langle e_1, e_l, e_{l+1}, e_{2l}\rangle^\perp = \langle e_2, \ldots, e_{l-1}, e_{l+2}, \ldots, e_{2l-1}\rangle$ и его пересечения с H-инвариантными подпространствами $\langle e_1, \ldots, e_l\rangle$ и $\langle e_l, e_{l+2}, \ldots, e_{2l}\rangle$, т. е. подпространства $\langle e_2, \ldots, e_{l-1}\rangle$ и $\langle e_{l+2}, \ldots, e_{2l-1}\rangle$, соответственно. Следовательно, $g = \mathrm{diag}(\lambda, (D^*)^{-1}, \lambda, \lambda, D, \lambda)$ для некоторой матрицы $D \in GL(\langle e_{l+1}, \ldots, e_{2l-1}\rangle)$ и некоторого числа $\lambda = \pm 1$. Таким образом, $H_b = GL_{l-2} \times \{1, -1\}$.

Обозначим за $S \subseteq X$ множество всех подпространств $s \in X$, содержащих прямую b. Ясно, что множество S H_b-эквивариантно изоморфно прообразу $\psi^{-1}(b) \subseteq W$. Рассмотрим оператор, переводящий базисный вектор e_1 в вектор $e_1 - e_{l+1}$, базисный вектор e_l в вектор $e_l + e_{2l}$ и оставляющий остальные базисные векторы на месте. Он переводит подпространство $\langle e_1, \ldots, e_l \rangle$ в подпространство $M = \langle e_1 - e_{l+1}, e_2, \ldots, e_{l-1}, e_l + e_{2l} \rangle$, содержащее прямую b, поэтому $M \in S$.

Теперь рассмотрим многообразие S' ($S \subseteq S' \subseteq X'$), состоящее из всех изотропных подпространств размерности l, содержащих прямую b. Тогда $S = S' \cap X$. Рассмотрим оператор B, меняющий местами базисные векторы e_2 и e_{2l-1} и оставляющий все остальные базисные векторы на месте. $B \in O_{2l} \setminus SO_{2l}$, поэтому оператор B меняет местами орбиты X и $X' \setminus X$. Заметим, что $Bb = b$, поэтому $BS' = S'$, и оператор B меняет местами многообразия S и $S' \setminus S$. Поскольку множество X — связная компонента множества X' и S' — замкнутое подмножество множества X', то множество S (соотв. $S' \setminus S$) содержит как минимум ту связную компоненту множества S', в которой лежит пространство M (соотв. BM). Ясно, что если $s' \in S'$, то $s' \subset b^\perp$.

Заметим, что билинейная форма на пространстве $\mathbb{C}^{2l}$ индуцирует невырожденную билинейную форму на пространстве $b^\perp/b$. Группа H_b сохраняет пространства b и $b^\perp$, поэтому она действует на пространстве $b^\perp/b$. Каноническая проекция $\pi \colon b^\perp \to b^\perp/b$ устанавливает изоморфизм φ между множеством S' и множеством $(l-1)$-мерных изотропных подпространств пространства $b^\perp/b$. Последнее множество состоит из двух $SO(b^\perp/b)$-орбит, которые являются его связными компонентами, и множество $\varphi(S)$ (соотв. $\varphi(S' \setminus S)$) содержит как минимум ту связную компоненту, в которой лежит пространство $\pi(M)$ (соотв. $\pi(BM)$). Следовательно, множество S связно и в точности изоморфно орбите $SO(b^\perp/b)\pi(M)$.

Рассмотрим следующий базис пространства $b^\perp/b$: $v_1 = \pi(e_1 - e_l - e_{l+1} - e_{2l})/2$, $v_2 = \pi(e_2)$, $\ldots$, $v_{l-1} = \pi(e_{l-1})$, $v_l = \pi(e_{l+2})$, $\ldots$, $v_{2l-3} = \pi(e_{2l-1})$, $v_{2l-2} = \pi(e_1 + e_l + e_{l+1} - e_{2l})/2$. Обозначим двойственный базис за $v_1^*, \ldots, v_{2l-2}^*$. Прямым вычислением проверяется, что билинейная форма на пространстве $b^\perp/b$ имеет вид $v_1^* \otimes v_{2l-2}^* + \ldots + v_{l-1}^* \otimes v_l^* + v_l^* \otimes v_{l-1}^* + \ldots + v_{2l-2}^* \otimes v_1^*$ и что $\pi(M) = \langle v_1, \ldots, v_{l-1} \rangle$. Из построения изоморфизма $H_b = GL_{l-2} \times \{1, -1\}$ и определения векторов v_i прямо следует, что группа H_b° действует на пространстве $b^\perp/b$ матрицами вида

$\mathrm{diag}(1,(D^*)^{-1},D,1)$, $D\in GL(\langle v_l,\ldots,v_{2l-3}\rangle)$.

Обозначим за P'_{l-1} (соотв. $(P'_{l-1})^-$) параболическую подгруппу группы $SO(b^\perp/b)$, сохраняющую подпространство $\langle v_1,\ldots,v_{l-1}\rangle$ (соотв. $\langle v_l,\ldots,v_{2l-3}\rangle$). Тогда группа $L'=P'_{l-1}\cap(P'_{l-1})^-$ является подгруппой Леви в группе P'_{l-1}, и группа H_b° вкладывается в группу L' с помощью своего действия на пространстве $b^\perp/b$. Заметим, что однородное пространство $SO(b^\perp/b)/P'_{l-1}$ $SO(b^\perp/b)$-изоморфно орбите $SO(b^\perp/b)\langle v_1,\ldots,v_{l-1}\rangle$. Обозначим унипотентный радикал группы $(P'_{l-1})^-$ за U'^-. Воспользуемся ещё одним предложением, доказанным в [21]:

Предложение 3.6. *[21, Proposition 2 (i)] Пусть P — параболическая подгруппа связной редуктивной группы G. Пусть P^- — противоположная параболическая подгруппа, т. е. такая, что пересечение $P\cap P^-$ является подгруппой Леви группы P. Пусть U^- — унипотентный радикал группы P^-, и пусть $\mathfrak{u}^-=\mathrm{Lie}\,U^-$. Обозначим за $p\in G/P$ образ группы P при каноническом отображении $G\to G/P$.*

Тогда орбита $U^-\cdot p$ открыта в многообразии G/P, группа $L=P\cap P^-$ сохраняет её, и многообразия $U^-\cdot p$ и $\mathfrak{u}^-$ L-изоморфны.

В рассматриваемом случае это предложение означает, что орбита $U'^-\langle v_1,\ldots,v_{l-1}\rangle$ открыта в многообразии $SO(b^\perp/b)/P'_{l-1}$ и L'-изоморфна (а значит и H_b°-изоморфна) алгебре $\mathfrak{u}'^-=\mathrm{Lie}\,U'^-$. Остаётся доказать, что группа H_b° действует на алгебре $\mathfrak{u}'^-$ с открытой орбитой. Алгебра $\mathfrak{u}'^-$ как $H_b^\circ=GL_{l-2}$-модуль (в смысле построенного выше изоморфизма) изоморфна $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-2}\oplus\mathbb{C}^{l-2}$. Будем обозначать компоненты элемента $u\in\mathfrak{u}'^-$ за u_1 и u_2.

Эта ситуация аналогична одному из предыдущих случаев, поскольку $l-2$ нечётно. Именно, любой тензор из пространства $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-2}$ определяет вырожденную кососимметрическую форму на пространстве $(\mathbb{K}^{l-2})^*$, и формы ранга $l-3$ образуют открытое подмножество. Выберем базис в тавтологическом GL_{l-2}-модуле, обозначим его $f_1,\ldots,f_{l-2}$. Если $\mathrm{rk}\,u_1=l-3$, то точку (u_1,u_2)

с помощью действия группы GL_{l-2} можно перевести в точку (u_1', u_2'), где $u_1' = f_1 \wedge f_2 + \ldots + f_{l-4} \wedge f_{l-3}$. Точки (u_1, u_2), для которых $\operatorname{rk} u_1 = l-3$ и каноническое спаривание между (любым ненулевым) элементом подпространства $\ker u_1 \subset (\mathbb{C}^{l-2})^*$ и вектором u_2 не равно нулю, образуют GL_{l-2}-инвариантное подмножество. Если точка (u_1, u_2) лежит в этом подмножестве и тензор u_1 уже переведён в тензор u_1', то вектор u_2' можно перевести в вектор f_{l-2} с помощью матрицы вида $(*)$, которая сохраняет тензор u_1'.

Следовательно, группа H_b° действует на пространстве $\mathfrak{u}'^-$ с открытой орбитой. По предложению 3.6, группа H_b° также действует на (неприводимом подмногообразии) $SO(b^\perp/b)\langle v_1, \ldots, v_{l-1}\rangle$ с плотной орбитой. По лемме 3.5 (1), группа H действует на многообразии G/P с открытой орбитой, следовательно, действие группы G на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ локально транзитивно.

3.2.3.3. $P = P_{1,l-1,l}$**.** Подгруппы P и P^- сопряжены при всех l, и достаточно доказать, что $\operatorname{gtd}(L : \mathfrak{u}) = 0$. Здесь $L = (\mathbb{C}^*)^2 \times GL_{l-2}$, и L-модуль $\mathfrak{u}$ раскладывается в прямую сумму семи простых модулей, которые мы будем обозначать за $V_1, \ldots, V_7$. Именно, V_1 — GL_{l-2}-модуль $(\mathbb{C}^{l-2})^*$, и его $(\mathbb{C}^*)^2$-вес равен $(1,0)$, V_2 — тривиальный GL_{l-2}-модуль с весом $(1,1)$, V_3 — GL_{l-2}-модуль $\mathbb{C}^{l-2}$ с весом $(0,1)$, V_4 — тривиальный GL_{l-2}-модуль с весом $(-1,1)$, V_5 — GL_{l-2}-модуль $\mathbb{C}^{l-2}$ с весом $(0,-1)$, V_6 — GL_{l-2}-модуль $\mathbb{C}^{l-2}$ с весом $(1,0)$, V_7 — GL_{l-2}-модуль $\Lambda^2\mathbb{C}^{l-2}$ с весом $(0,0)$. Обозначим компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}^-$ за $u_1, \ldots, u_7$.

Существует GL_{l-2}-инвариантное спаривание между модулями V_1 и V_3, $(\mathbb{C}^*)^2$-вес которого равен $(1,1)$. Следующая функция является рациональным L-инвариантом:

$$\frac{(u_1, u_3)}{u_2}.$$

Следовательно, действие $G : G/P$ не локально 3-транзитивно.

3.2.4. Группа G типа E_6

Согласно теореме 3.2, достаточно рассмотреть случай подгруппы $P = P_{1,6}$. Поскольку все автоморфизмы схемы Дынкина E_6 сохраняют множество вершин $\{1, 6\}$, сопряжение элементом группы Вейля максимальной длины переводит P в P^-. Поэтому применимо предложение 3.4, и достаточно найти максимальную степень локальной транзитивности $\mathrm{gtd}(L : \mathfrak{u}^-)$.

Подгруппа Леви L локально изоморфна группе $(\mathbb{C}^*)^2 \times Spin_8$, и алгебра $\mathfrak{u}^-$ как L-модуль раскладывается в прямую сумму $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Здесь модуль V_1 (соотв. V_2, V_3) как подпространство в алгебре $\mathfrak{g}$, есть прямая сумма всех подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, для которых разложение корня $\alpha \in \Phi^-$ в линейную комбинацию простых корней содержит оба корня α_1 и α_6 с коэффициентом -1 (соотв. корень α_1 с коэффициентом -1 и корень α_6 с коэффициентом 0 для модуля V_2, корень α_1 с коэффициентом 0 и корень α_6 с коэффициентом -1 для модуля V_3). Рассмотрим следующее вложение диаграмм Дынкина $D_4 \to E_6$: вершина 1 (соотв. 3, 4) переходит в вершину 2 (соотв. 3, 5). Обозначим за ϖ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ фундаментальный вес группы $Spin_8$, соответствующий i-му простому корню (в соответствии с исходной нумерацией вершин схемы Дынкина D_4). Тогда пространство V_1 как $Spin_8$-модуль имеет младший вес $-\varpi_1$, т. е. это тавтологический SO_8-модуль (группа $Spin_8$ действует на пространстве V_1 с двухэлементным ядром, и факторгруппа равна SO_8), а пространство V_2 (соотв. V_3) как $Spin_8$-модуль имеет младший вес $-\varpi_3$ (соотв. $-\varpi_4$). Обозначим компоненты вектора $u \in \mathfrak{u}^-$ за u_1, u_2, u_3.

Поскольку V_1 — тавтологический SO_8-модуль, на нём существует SO_8-инвариантная (а значит и $Spin_8$-инвариантная) квадратичная форма, которую обозначим (u_1, u_1). Существуют диаграммные автоморфизмы группы $Spin_8$, которые переводят тавтологический SO_8-модуль в $Spin_8$-модули, изоморфные модулям V_2 и V_3. Поэтому на модуле V_2 (соотв. V_3) существует квадратичный $Spin_8$-инвариант, который будем обозначать (u_2, u_2) (соотв. (u_3, u_3)). По описаниям модулей V_1, V_2 и V_3 в терминах корневых подпространств можно вычислить, что $(\mathbb{C}^*)^2$-вес модуля V_1 равен сумме $(\mathbb{C}^*)^2$-весов модулей V_2 и V_3. Значит, следующая функция является рациональным L-инвариантом:

$$\frac{(u_2, u_2)(u_3, u_3)}{(u_1, u_1)},$$

и действие группы G на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ не локально транзитивно. $\square$

3.3. Конечность числа орбит

Изучение вопроса о том, для каких G, P и n, группа G действует на многообразии $(G/P)^n$ с конечным числом орбит, начнём со следующего предложения.

Предложение 3.7. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, $P \subset G$ — собственная параболическая подгруппа. Тогда при $n \geq 4$ число G-орбит на многообразии $(G/P)^n$ бесконечно.*

Доказательство. Пусть $P = P_{i_1,\ldots,i_s}$. Обозначим i-й фундаментальный вес группы G за ϖ_i. Рассмотрим доминантный вес $\lambda = \varpi_{i_1} + \ldots + \varpi_{i_s}$. Тогда многообразие G/P изоморфно проективизации орбиты старшего вектора v_λ в модуле $V(\lambda)$. Далее будем коротко писать $i = i_1$. Выберем произвольный ненулевой элемент $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Легко видеть, что $y_i^2 v_\lambda = 0$. Обозначим за U_0 унипотентную подгруппу $\exp(ty_i)$. Тогда орбита $U_0 v_\lambda$ — аффинная прямая, не проходящая через 0. Замыканием её образа в проективизации $\mathbf{P}(V(\lambda))$ является проективная прямая $\mathbf{P}^1 \subseteq G/P \subseteq \mathbf{P}(V(\lambda))$. Выберем $n \geq 4$ точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}^1 \times \ldots \times \mathbf{P}^1 \subseteq G/P \times \ldots \times G/P$. Двойное отношение первых четырёх из этих точек не меняется при действии группы G. Значит, такие наборы с разными двойными отношениями не могут лежать в одной орбите, и число орбит бесконечно. $\square$

Теперь докажем и выведем из ранее известных результатов следующую теорему.

Теорема 3.8. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа и $P \subset G$ — параболическая подгруппа, $n \in \mathbb{N}$. Если $n \leq 2$, то множество G-орбит на многообразии $(G/P)^n$ всегда конечно. Если $n \geq 3$, то следующие условия эквивалентны.*

1. *Множество G-орбит на многообразии $(G/P)^n$ конечно.*

2. *$n = 3$, P — максимальная параболическая подгруппа, и группа G действует на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой.*

3. *$n = 3$, и многообразие $G/P \times G/P$ сферическое.*

Доказательство. Конечность числа орбит для $n \leq 2$ следует из разложения Брюа, как уже было отмечено во введении. При $n \geq 4$ число орбит бесконечно по предложению 3.7. Далее будем считать, что $n = 3$.

Напомним, что B — борелевская подгруппа группы G. Известно, что множество B-орбит на любом сферическом G-многообразии X конечно, см. [2], [9]. Следовательно, множество G-орбит на многообразии $G/B \times X$ также конечно. Значит, если $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа, а X — сферическое G-многообразие, то множество G-орбит на многообразии $G/P \times X$ также конечно ($3 \Rightarrow 1$).

Классификация всех пар параболических подгрупп (P, Q), таких что многообразие $G/P \times G/Q$ сферическое, была получена в работах [16] и [23]. Из этой классификации и из теоремы 3.2 следует, что если P_i — максимальная параболическая подгруппа и группа G действует на многообразии $G/P_i \times G/P_i \times G/P_i$ с открытой орбитой, то многообразие $G/P_i \times G/P_i$ сферическое ($2 \Rightarrow 3$).

Осталось доказать импликацию $1 \Rightarrow 2$. Из теоремы [17, Theorem 2.2] следует, что если группа GL_{l+1} действует на многообразии $GL_{l+1}/P^{(1)} \times GL_{l+1}/P^{(2)} \times GL_{l+1}/P^{(3)}$, где $P^{(i)}$ — параболические подгруппы, с конечным числом орбит, то хотя бы одна из подгрупп $P^{(i)}$ — максимальная параболическая. Этот результат можно напрямую применить к действию группы SL_{l+1}, поскольку центральный тор группы GL_{l+1} содержится во всех её параболических подгруппах и действует на всех многообразиях флагов тривиально.

Теперь (см. теорему 3.3) остаётся доказать, что если P — немаксимальная параболическая подгруппа группы типа D_l ($l \geq 4$) и $\mathrm{gtd}(G : G/P) = 3$, то множество G-орбит на многообразии $G/P \times G/P \times G/P$ бесконечно. Мы построим бесконечное семейство орбит явно.

Рассмотрим $(2l)$-мерное пространство $\mathbb{C}^{2l}$ с базисом $e_1, \ldots, e_{2l}$. Пусть группа SO_{2l} действует в этом пространстве, сохраняя форму $e_1^* \otimes e_{2l}^* + \ldots + e_l^* \otimes e_{l+1}^* + e_{l+1}^* \otimes e_l^* + \ldots + e_{2l}^* \otimes e_1^*$. Пусть $X' \subset Gr(l, \mathbb{C}^{2l})$ — множество всех изотропных l-мерных подпространств пространства $\mathbb{C}^{2l}$. Известно, что многообразия G/P_{l-1} и G/P_l изоморфны двум связным компонентам многообразия X' (соответственно). Далее будем обозначать $G/P_{l-1} = X \subseteq X'$. Для любого подпространства $s \in X$ обозначим за $Y_s \subset \mathbf{P}(\mathbb{C}^{2l})$ множество всех прямых, содержащихся в s. Легко видеть, что замкнутое подмножество $Y = \cup_{s \in X}(s \times Y_s) \subset Gr(l, \mathbb{C}^{2l}) \times \mathbf{P}(\mathbb{C}^{2l})$ изоморфно однородному пространству $SO_{2l}/P_{1,l-1}$.

Аналогично, для каждого подпространства $s \in X$ обозначим за $Z_s \subset Gr(l-1, \mathbb{C}^{2l})$ множество всех $(l-1)$-мерных подпространств пространства s. Аналогично проверяется, что замкнутое подмножество $Z = \cup_{s \in X}(s \times Z_s) \subset Gr(l, \mathbb{C}^{2l}) \times Gr(l-1, \mathbb{C}^{2l})$ изоморфно однородному пространству $SO_{2l}/P_{l-1,l}$.

Пусть сначала $l = 3$. Рассмотрим следующие изотропные пространства: $V_1 = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$, $V_2 = \langle e_2, e_3, e_6 \rangle$, $V_3 = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$. Они лежат в одной и той же SO_6-орбите, и из выбора подгруппы P_l в начале раздела 3.2.3 следует, что $V_1, V_2, V_3 \in X$. Выберем произвольную прямую $a_1 \subset \langle e_1, e_2 \rangle$, тогда $a_1 \subset V_1$. Также выберем прямые $a_2 \subset \langle e_2, e_3 \rangle$ и $a_3 \subset \langle e_1, e_3 \rangle$, тогда $a_2 \subset V_2$ и $a_3 \subset V_3$. Потребуем, чтобы прямые a_2 и a_3 не совпадали и чтобы их сумма (как подпространств пространства $\mathbb{C}^6$) $a_2 + a_3$ не была бы равна $\langle e_1, e_2 \rangle$, в остальном их выбор может быть произвольным. Рассмотрим точку $((V_1, a_1), (V_2, a_2), (V_3, a_3)) \in Y \times Y \times Y$.

В пространстве $\langle e_1, e_2\rangle$ имеем четыре прямых: $\langle e_1\rangle = V_1\cap V_3$, $\langle e_2\rangle = V_2\cap V_3$, a_1 и $a_4 = (a_2\oplus a_3)\cap\langle e_1, e_2\rangle$. Эти четыре прямые определены в терминах пересечений и сумм пространств V_i и a_i. Если к этим четырём прямым применить элемент $g \in G$, то мы получим четыре прямые, которые получаются с помощью тех же самых операций, но применённых к подпространствам gV_i и ga_i вместо V_i и a_i. Двойное отношение этих четырёх прямых в их двумерной линейной оболочке не меняется при действии группы G. Поскольку прямая a_1 была выбрана произвольно, то это двойное отношение может быть любым числом, и множество орбит бесконечно.

Рассмотрим те же самые подпространства V_i и a_i, а также подпространства $W_1 = a_1\oplus\langle e_4\rangle$, $W_2 = a_2\oplus\langle e_6\rangle$ и $W_3 = a_3\oplus\langle e_5\rangle$. Точка $((V_1, W_1), (V_2, W_2), (V_3, W_3))$ лежит в многообразии $Z \times Z \times Z$. Заметим, что $\langle e_1, e_2, e_3\rangle = (V_1 \cap V_2) \oplus (V_2 \cap V_3)\oplus(V_1\cap V_3)$ и $a_i = W_i\cap\langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Снова получаем двумерное подпространство $\langle e_1, e_2\rangle$ и четыре прямых в нём, определённые в терминах сумм и пересечений подпространств V_i и W_i. Значит, и в этом случае существует SO_6-инвариантное двойное отношение, и множество орбит бесконечно.

Теперь пусть $l > 3$. Построим пространства V_i, a_i и W_i так же, как и выше, используя три последних базисных вектора вместо векторов e_4, e_5, e_6. Пусть $V_i' = V_i \oplus \langle e_4, \ldots, e_l\rangle$ и $W_i' = W_i \oplus \langle e_4, \ldots, e_l\rangle$. Точки $((V_1', a_1), (V_2', a_2), (V_3', a_3))$ и $((V_1', W_1'), (V_2', W_2'), (V_3', W_3'))$ лежат в многообразиях $Y \times Y \times Y$ и $Z \times Z \times Z$, соответственно. Рассмотрим также подпространство $M = (V_1'\cap V_2'\cap V_3')^{\perp}$. Ограничение билинейной формы на это подпространство вырождено, её ядро равно $V_1'\cap V_2'\cap V_3' = \langle e_4, \ldots, e_l\rangle$. Профакторизовав пространство M по этому ядру, получим шестимерное пространство с невырожденной билинейной формой. Ограничение морфизма факторизации на подпространство $\langle e_1, e_2, e_3, e_{2l-2}, e_{2l-1}, e_{2l}\rangle$ является изоморфизмом, поэтому мы снова получаем подпространства V_i, a_i, W_i в шестимерном пространстве, определённые так же, как и выше. Мы оказываемся в точности в той же ситуации, что и выше для группы SO_6, и снова можем определить двойные отношения для рассматриваемых точек в многообразиях $G/P_{1,l-1}\times G/P_{1,l-1}\times G/P_{1,l-1}$ и $G/P_{l-1,l}\times G/P_{l-1,l}\times G/P_{l-1,l}$, и эти двойные отношения сохраняются при действии группы G. Следовательно, множества SO_{2l}-орбит на этих многообразиях бесконечны. Теорема 3.8 доказана. $\square$

Следствие 3.9. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа и $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Пусть $n \geq 3$. Тогда диагональное действие группы G на многообразии $(G/P)^n$ имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда $n = 3$ и пара (G, P) с точностью до сопряжения перечислена в таблице 3.3.*

Таблица 3.3

Тип группы G	P
A_l	любая максимальная
$B_l, l \geq 3$	P_1, P_l
$C_l, l \geq 2$	P_1, P_l
$D_l, l \geq 4$	P_1, P_{l-1}, P_l
E_6	P_1, P_6
E_7	P_7

Доказательство. Это утверждение прямо следует из теоремы 3.8 и теоремы 3.2. $\square$

Глава 4

Действия коммутативной унипотентной группы с открытой орбитой

Пусть G — редуктивная связная алгебраическая группа, $P \subseteq G$ — её параболическая подгруппа, и $m = \dim(G/P)$. Наша цель в данной главе — классифицировать $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P с точностью до автоморфизмов многообразия G/P и автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$.

4.1. Сведение задачи к случаю простой группы G

Если $G = P$, то G/P — одна точка, $m = \dim(G/P) = 0$, и ситуация полностью тривиальна. Далее мы считаем, что $G \neq P$.

Если группа G имеет нетривиальный центр Z, то $Z \subset P$, и $G/P \cong (G/Z)/(P/Z)$. Таким образом, чтобы изучать $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P, мы можем и будем без ограничения общности считать, что группа G полупростая и присоединённая. Тогда, по лемме 2.7, можно также без ограничения общности считать, что пара (G, P) неисключительная. По следствию 2.9,

$\mathrm{CAut}(G/P)^\circ = G$. Таким образом, вместо классификации локально транзитивных действий группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии G/P, мы можем классифицировать вложения $(\mathbf{G}_a)^m \to G$, такие что их образы действуют на многообразии G/P с открытой орбитой.

Лемма 4.1. *В сделанных выше предположениях, пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}$ — разложение группы G на связные простые множители, и пусть $P^{(i)} = G^{(i)} \cap P$. Предположим, что коммутативная унипотентная подгруппа $A \subset G$ действует на многообразии G/P с открытой орбитой. Обозначим за p_i естественную проекцию $p_i \colon G \to G^{(i)}$. Тогда $A^{(i)} = p_i(A)$ — коммутативная унипотентная подгруппа группы $G^{(i)}$, группа $A^{(i)}$ действует на многообразии $G^{(i)}/P^{(i)}$ с открытой орбитой, и $A = A^{(1)} \times \ldots \times A^{(s)}$.*

Доказательство. Выберем точку $x = (x_1, \ldots, x_s) \in G/P = G^{(1)}/P^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}/P^{(s)}$ из открытой A-орбиты на многообразии G/P. Если другая точка $(y_1, \ldots, y_s) \in G/P$ лежит в орбите Ax, то $y_i \in p_i(A)x_i$ для всех i $(1 \le i \le s)$. Следовательно, орбита $A^{(i)}x_i \subseteq G^{(i)}/P^{(i)}$ открыта. Фактор коммутативной унипотентной группы — всегда коммутативная унипотентная группа. Ясно, что $A \subseteq A^{(1)} \times \ldots \times A^{(s)}$. С другой стороны, $\dim A = \dim(G/P) = \sum \dim(G^{(i)}/P^{(i)}) = \sum \dim A^{(i)}$, и, поскольку все группы $A^{(i)}$ связны, $A = A^{(1)} \times \ldots \times A^{(s)}$. □

Эта лемма позволяет свести задачу классификации коммутативных унипотентных подгрупп группы G, действующих на многообразии G/P с открытой орбитой, где группа G связная, полупростая и присоединённая и пара (G, P) неисключительная, к случаю, когда всё перечисленное выше верно, но кроме того, группа G простая.

Далее мы собираемся воспользоваться теоремой из [7], в которой классифицируются все такие пары (G, P), удовлетворяющие указанным выше условиям, что существует хотя бы одно локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии G/P.

Теорема 4.2. *(см. [7, Theorem 1]) Пусть G — присоединённая связная простая алгебраическая группа, и пусть $P \subset G$ — параболическая подгруппа, такая что пара (G, P) неисключительная. Тогда многообразие G/P допускает локально транзитивное $(\mathbf{G}_a)^m$-действие тогда и только тогда, когда пара (G, P) перечислена в таблице 4.1. (Здесь мы используем обозначения, введённые в разделе 2.1 для параболических подгрупп связной простой группы G.)*

Таблица 4.1

G	P (с точностью до сопряжения)
PSL_{l+1}	P_i $(1 \leq i \leq l)$
SO_{2l+1}	P_1
PSp_{2l}	P_l
PSO_{2l}	P_i $(i = 1, l-1, l)$
Группа типа E_6	P_i $(i = 1, 6)$
Группа типа E_7	P_7

Эти параболические подгруппы — это в точности такие параболические подгруппы P группы G, что пара (G, P) неисключительная и унипотентный радикал группы P коммутативен.

Следовательно, чтобы классифицировать локально транзитивные $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на всех изучаемых однородных пространствах, достаточно рассматривать только многообразия вида G/P, где G — связная простая присоединённая алгебраическая группа, а P — такая параболическая подгруппа группы G, что пара (G, P) неисключительная и унипотентный радикал группы P коммутативен.

4.2. Сведение задачи о $(\mathbf{G}_a)^m$-действиях к задаче об умножениях

Здесь и далее мы предполагаем, что группа G связная и простая, что пара (G, P) неисключительная, и что унипотентный радикал U группы P коммутативен. Тогда группа U^- и алгебры $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}^-$ также коммутативны.

Предложение 4.3. *Пусть G — связная простая присоединённая алгебраическая группа, P — некоторая её параболическая подгруппа, такая что пара (G, P) неисключительная и что унипотентный радикал группы P коммутативен. Обозначим $m = \dim(G/P)$. Тогда локально транзитивные действия $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$, рассматриваемые с точностью до G-сопряжения и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с коммутативными унипотентными подалгебрами $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, дополнительными к алгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, рассматриваемыми с точностью до P-сопряжения.*

Доказательство. По определению категорной группы автоморфизмов, эффективные $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P задают вложения $(\mathbf{G}_a)^m \to (\mathrm{CAut}(G/P))^\circ = G$, и G-сопряжение действий соответствует сопряжению соответствующих подгрупп в группе G. После подходящего сопряжения можно считать, что орбита $(\mathbf{G}_a)^m 1_G P \subseteq G/P$ открыта. Обозначим образ этого вложения $(\mathbf{G}_a)^m \hookrightarrow G$ за A. Орбита $(\mathbf{G}_a)^m 1_G P \subseteq G/P$ открыта тогда и только тогда, когда подмножество $AP \subseteq G$ открыто, что эквивалентно условию $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. Поскольку $m = \dim(G/P)$, то из условия $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ следует, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$.

Ясно, что если $p \in P$ и $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, то $(\mathrm{Ad}\, p)\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. Остаётся доказать, что если g — такой элемент группы G, что $(\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, то существует такой элемент $p \in P$, что $(\mathrm{Ad}\, p)\mathfrak{a} = (\mathrm{Ad}\, g)\mathfrak{a}$. Подалгебра $\mathfrak{a}$ определяет точку в грассманиане $Gr(m, \mathfrak{g})$, и присоединённое действие $G : \mathfrak{g}$ определяет действие $G : Gr(m, \mathfrak{g})$, которое мы тоже будем обозначать Ad. Обозначим орбиту алгебры

$\mathfrak{a}$ в грассманиане $Gr(m, \mathfrak{g})$ при этом действии за X. Ясно, что подпространства, определённые точками орбиты X, являются подалгебрами Ли. Поскольку множество PA открыто в группе G, то подмножество $(\operatorname{Ad} PA)\mathfrak{a} \subseteq X$ также открыто и, поскольку $(\operatorname{Ad} A)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, то мы можем заключить, что $(\operatorname{Ad} P)\mathfrak{a}$ — открытое подмножество множества X.

Обозначим $A_1 = gAg^{-1}$. Тогда $\operatorname{Lie} A_1 = (\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a}$. Рассуждая аналогично, используя A_1 вместо A, получаем, что $(\operatorname{Ad} P)((\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a})$ — открытое подмножество множества X. Поскольку группа G связна, то многообразие X неприводимо, и его открытые подмножества $(\operatorname{Ad} P)\mathfrak{a}$ и $(\operatorname{Ad} P)((\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a})$ пересекаются нетривиально, т. е. существуют такие элементы $p_1, p_2 \in P$, что $(\operatorname{Ad} p_1)\mathfrak{a} = (\operatorname{Ad} p_2 g)\mathfrak{a}$, и $(\operatorname{Ad} p_2^{-1} p_1)\mathfrak{a} = (\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a}$. □

Вспомним, что коммутативная унипотентная подалгебра $\mathfrak{u}^- \subset \mathfrak{g}$ дополнительна к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{a}$ — другая коммутативная унипотентная подалгебра, дополнительная к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, то любой элемент $u \in \mathfrak{u}^-$ может быть записан в виде $u = a + p$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $p \in \mathfrak{p}$. Положим $\varphi(u) = -p$. Ясно что $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{p}$ — линейное отображение, и для любого элемента $u \in \mathfrak{u}^-$ выполнено $u + \varphi(u) \in \mathfrak{a}$. С другой стороны, любой элемент $a \in \mathfrak{a}$ может быть записан в виде $a = v + q$, где $v \in \mathfrak{u}^-$ и $q \in \mathfrak{p}$, и мы видим из определения отображения φ, что этому уравнению удовлетворяет $q = \varphi(v)$. Следовательно, $\mathfrak{a} = \{u + \varphi(u) \mid u \in \mathfrak{u}^-\}$.

Определение 4.4. Назовём это линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{p}$ *линейным отображением, ассоциированным с подалгеброй* $\mathfrak{a}$.

Замечание 4.5. *Соответствие между подалгебрами* $\mathfrak{a}$ *и ассоциированными линейными отображениями* φ *эквивариантно относительно* L*-действий на множестве* m*-мерных подалгебр алгебры* $\mathfrak{g}$*, на алгебре* $\mathfrak{u}^-$ *и на алгебре* $\mathfrak{p}$*. Другими словами, если линейное отображение* $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{p}$ *ассоциировано с некоторой подалгеброй* $\mathfrak{a}$*, и* $l \in L$*, то отображение* $l \cdot \varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{p}$*, определённое как* $(l \cdot \varphi)(u) = (\operatorname{Ad} l)(\varphi((\operatorname{Ad} l^{-1})u))$*, ассоциировано с подалгеброй* $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a}$*.*

Если о подалгебре $\mathfrak{a}$ известно только, что она удовлетворяет условиям предложения 4.3, то про линейное отображение φ, ассоциированное с алгеброй $\mathfrak{a}$, можно сказать только, что оно отображает подалгебру $\mathfrak{u}^-$ в подалгебру $\mathfrak{p}$. Тем не менее, следующее предложение показывает, что об образе $\varphi(\mathfrak{u}^-)$ можно сказать больше, если к алгебре $\mathfrak{a}$ применить подходящее сопряжение элементом группы P. Напомним, что U_1^- — унипотентный радикал группы B^- и что $\mathfrak{u}_1^- = \operatorname{Lie} U_1^-$.

Предложение 4.6. *Мы сохраняем обозначения и предположения, введённые в разделе 2.1 и в предложении 4.3. Для любой коммутативной унипотентной подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, дополнительной к подалгебре $\mathfrak{p}$, существует такой элемент $p \in P$, что $(\operatorname{Ad} p)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$.*

Доказательство. Снова рассмотрим точку в грассманиане $Gr(m, \mathfrak{g})$, заданную алгеброй $\mathfrak{a}$, и действие $G : Gr(m, \mathfrak{g})$. Снова обозначим орбиту алгебры $\mathfrak{a}$ при этом действии за X. Мы уже знаем, что подмножество $(\operatorname{Ad} P)\mathfrak{a}$ открыто в множестве X.

Рассмотрим произвольную максимальную унипотентную подалгебру $\mathfrak{u}_2$, содержащую подалгебру $\mathfrak{a}$. Поскольку все максимальные унипотентные подгруппы в группе G сопряжены, существует такой элемент $g \in G$, что $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1^-$. Тогда $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$. Из разложения Брюа группы G следует, что подмножество PU_1^- открыто в группе G, поэтому подмножество $(\operatorname{Ad} PU_1^-)((\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a})$ открыто в множестве X. Следовательно, подмножества $(\operatorname{Ad} P)\mathfrak{a}$ и $(\operatorname{Ad} PU_1^-)((\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a})$ имеют непустое пересечение, т. е. существуют такие элементы $p_1, p_2 \in P$, $u_1 \in U_1^-$, что $(\operatorname{Ad} p_1)\mathfrak{a} = (\operatorname{Ad} p_2 u_1)(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a}$. Пусть $p = p_2^{-1} p_1$, тогда $(\operatorname{Ad} p)\mathfrak{a} = (\operatorname{Ad} u_1)(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$, поскольку $(\operatorname{Ad} g)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$. □

В этом предложении мы доказали, что можно перевести любую подалгебру $\mathfrak{a}$, удовлетворяющую требованиям предложения 4.3, внутрь алгебры $\mathfrak{u}_1^-$, но в дальнейшем мы в основном будем пользоваться только тем фактом, что такую подалгебру $\mathfrak{a}$ можно перевести внутрь подалгебры $\mathfrak{p}^-$.

Следствие 4.7. *Для любого класса P-сопряжённости коммутативных унипотентных подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, дополнительных к подалгебре $\mathfrak{p}$, существует такой класс L-сопряжённости линейных отображений $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$, что каждое из этих отображений φ — это линейное отображение, ассоциированное с некоторой подалгеброй $\mathfrak{a}$ из этого класса P-сопряжённости.*

Доказательство. Каждый класс P-сопряжённости подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, дополнительных к подалгебре $\mathfrak{p}$, содержит некоторую алгебру $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$. Пусть φ — линейное отображение, ассоциированное с алгеброй $\mathfrak{a}$. Тогда для любого элемента $u \in \mathfrak{u}^-$ имеем $u + \varphi(u) \in \mathfrak{u}_1^-$, поэтому, поскольку алгебры $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}_1^-$ являются подпространствами алгебры $\mathfrak{p}^-$, то $\varphi(u) \in \mathfrak{p}^- \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{l}$. Если мы применим некоторый элемент $l \in L$ к этому отображению φ, то, как уже было замечено выше, полученное отображение $l \cdot \varphi$ будет линейным отображением, ассоциированным с алгеброй $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a}$. □

Заметим, что неверно, вообще говоря, что любое линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$ ассоциировано с подходящей подалгеброй. например, можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.8. *Пусть линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$ ассоциировано с коммутативной унипотентной подалгеброй $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^-$, дополнительной к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{u}^-)$ — коммутативная унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{l}$.*

Доказательство. Рассмотрим два произвольных элемента $u, v \in \mathfrak{u}^-$. Поскольку $u + \varphi(u), v + \varphi(v) \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{p}^-$, а $\mathfrak{u}^-$ — идеал в алгебре $\mathfrak{p}^-$, то $0 = [u + \varphi(u), v + \varphi(v)] = [u, v] + [u, \varphi(v)] + [\varphi(u), v] + [\varphi(u), \varphi(v)]$. Первые три слагаемых лежат в алгебре $\mathfrak{u}^-$, а последнее лежит в алгебре $\mathfrak{l}$. При этом подалгебра $\mathfrak{u}^-$ дополнительна к подалгебре $\mathfrak{l}$ в алгебре $\mathfrak{p}^-$. Поэтому $[\varphi(u), \varphi(v)] = 0$, и $\varphi(\mathfrak{u}^-)$ — подалгебра в алгебре $\mathfrak{l}$.

Представление группы L в алгебре $\mathfrak{u}^-$ эффективно, поэтому достаточно доказать, что все операторы вида $\operatorname{ad} \varphi(u)|_{\mathfrak{u}^-}$ нильпотентны. Зафиксируем элемент $u \in \mathfrak{u}^-$ и допустим, что оператор $\operatorname{ad}\varphi(u)|_{\mathfrak{u}^-}$ не является нильпотентным. Поскольку алгебра $\mathfrak{u}^-$ коммутативна, то $\operatorname{ad}(\varphi(u)+u)|_{\mathfrak{u}^-} = \operatorname{ad}\varphi(u)|_{\mathfrak{u}^-}$, и оператор $\operatorname{ad}(\varphi(u)+u)|_{\mathfrak{u}^-}$ не является нильпотентным. Но тогда оператор $\operatorname{ad}(\varphi(u)+u)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ также не является нильпотентным, но $\varphi(u)+u \in \mathfrak{a}$, а алгебра $\mathfrak{a}$ — коммутативная унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, противоречие. □

Вообще говоря, могло бы оказаться так, что для некоторого класса P-сопряжённости $\mathscr{A}$ коммутативных унипотентных подалгебр $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, дополнительных к подалгебре $\mathfrak{p}$, существует много таких классов L-сопряжённости $\mathscr{B}_i$ (здесь i — элемент некоторого множества индексов I, не обязательно натуральное число) отображений $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$, что каждое из отображений φ из каждого из этих классов $\mathscr{B}_i$ ассоциировано с некоторой подалгеброй $\mathfrak{a} \in \mathscr{A}$. Следствие 4.7 утверждает, что хотя бы один такой класс $\mathscr{B}_i$ существует, но мы пока не знаем, единственный ли он. В дальнейшем мы увидим, что он единственен для каждого класса сопряжённости $\mathscr{A}$. Более того, мы увидим, что в большинстве случаев существует только один класс $\mathscr{A}$ и только один класс L-сопряжённости $\mathscr{B}$ отображений $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$, ассоциированных с коммутативными унипотентными подалгебрами алгебры $\mathfrak{g}$, дополнительными к подалгебре $\mathfrak{p}$. Мы докажем это позже, но сейчас мы уже можем доказать следующую лемму.

Лемма 4.9. *Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^-$ — коммутативная унипотентная подалгебра, дополнительная к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда существует такой элемент $l \in L$, что $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}_1^-$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$ — линейное отображение, ассоциированное с подалгеброй $\mathfrak{a}$. По лемме 4.8, $\varphi(\mathfrak{u}^-)$ — коммутативная унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{l}$. Выберем произвольную максимальную унипотентную подалгебру $\mathfrak{u}_2 \subset \mathfrak{l}$, содержащую подалгебру $\varphi(\mathfrak{u}^-)$. Заметим, что $\mathfrak{u}_1^- \cap \mathfrak{l}$ — также максимальная унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{l}$. Существует такой элемент $l \in L$, что

$(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1^- \cap \mathfrak{l}$. Тогда $(\operatorname{Ad} l)\varphi(\mathfrak{u}^-) \subset \mathfrak{u}_1^-$. Имеем $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a} = \{(\operatorname{Ad} l)u + (\operatorname{Ad} l)\varphi(u) \mid u \in \mathfrak{u}^-\} = \{u + (\operatorname{Ad} l)\varphi((\operatorname{Ad} l^{-1})u) \mid u \in \mathfrak{u}^-\} \subseteq \mathfrak{u}_1^-$. □

Замечание 4.10. *Поскольку подгруппа L и подалгебра $\mathfrak{l}$ действуют на подалгебре $\mathfrak{u}^-$, то любое линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$ позволяет определить билинейное отображение $\mu\colon \mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$ по правилу $\mu(u,v) = [\varphi(u), v]$. Поскольку представление $\mathfrak{l} : \mathfrak{u}^-$ эффективно, билинейное отображение μ позволяет восстановить линейное отображение φ.*

Определение 4.11. Назовём это билинейное отображение μ *билинейным отображением, ассоциированным с линейным отображением φ.*

Если φ — линейное отображение, ассоциированное с коммутативной унипотентной подалгеброй $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^-$, дополнительной к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, то будем коротко говорить "билинейное отображение, ассоциированное с подалгеброй $\mathfrak{a}$" вместо "билинейное отображение, ассоциированное с линейным отображением φ". Теперь дадим определение, описывающее, какие билинейные отображения $\mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$ в действительности асооциированы с коммутативными унипотентными подалгебрами алгебры $\mathfrak{p}^-$, дополнительными к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ (см. теорему 4.16).

Определение 4.12. Пусть L — связная редуктивная алгебраическая группа, а V — её некоторое конечномерное представление. Эти данные определяют действие алгебры Ли $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$ в пространстве V. Обозначим действие элемента $x \in \mathfrak{l}$ на пространстве V за $\rho(x)$. Билинейное отображение $\mu\colon V \times V \to V$ называется *умножением, согласованным с действием алгебры* $\mathfrak{l}$, если:

1. Оно коммутативно.

2. Оно ассоциативно.

3. Все операторы умножения $\mu_v\colon V \to V$ (где $v \in V$) нильпотентны.

4. Для любого вектора $v \in V$ существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что $\rho(x) = \mu_v$.

Лемма 4.13. *Пусть L — связная редуктивная алгебраическая группа, а V — некоторое её точное конечномерное представление. Обозначим действие элемента $x \in \mathfrak{l}$ на пространстве V за $\rho(x)$. Пусть $\mu\colon V \times V \to V$ — некоторое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$.*

Тогда существует единственное отображение $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$, такое что $\mu_v = \rho(\varphi(v))$ для любого вектора $v \in V$. Более того, это отображение φ линейно.

Доказательство. По определению умножения, согласованного с действием алгебры $\mathfrak{l}$, для любого вектора $v \in V$ существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что $\mu_v = \rho(x)$. Поскольку представление V точное, то оно точное и как представление алгебры $\mathfrak{l}$, поэтому такой элемент $x \in \mathfrak{l}$ единственен. Определим отображение $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$ как $\varphi(v) = x$. Тогда для любого вектора $v \in V$ выполнено $\mu_v = \rho(\varphi(v))$, и мы доказали, что такое отображение φ единственно.

Если $u, v \in V$ и $a, b \in \mathbb{C}$, то $\rho(\varphi(au+bv)) = \mu_{au+bv} = a\mu_u + b\mu_v = a\rho(\varphi(u)) + b\rho(\varphi(v)) = \rho(a\varphi(u)+b\varphi(v))$, поэтому, поскольку представление точное, то $\varphi(au+bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$, и отображение φ линейно. □

Определение 4.14. Пусть дано точное конечномерное представление V некоторой связной редуктивной группы L, соответствующий гомоморфизм алгебр Ли $\rho\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$ и умножение $\mu\colon V \times V \to V$, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Назовём (единственное и линейное по лемме 4.13) отображение $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$, такое что $\mu_v = \rho(\varphi(v))$ для всех векторов $v \in V$, *линейным описанием* умножения μ.

Лемма 4.15. *Пусть L — некоторая связная редуктивная алгебраическая группа, и пусть V — некоторое её точное конечномерное представление. Пусть $\mu\colon V \times V \to V$ — умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, и пусть $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$ — его линейное описание. Тогда $\varphi(V)$ — коммутативная унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{l}$.*

Доказательство. Обозначим за ρ гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$. Поскольку умножение μ коммутативно и ассоциативно, то все операторы умножения коммутируют между собой, и $0 = [\rho(\varphi(u)), \rho(\varphi(v))] = \rho([\varphi(u), \varphi(v)])$ для всех векторов $u, v \in V$. Поскольку представление точно, то $[\varphi(u), \varphi(v)] = 0$, и $\varphi(V)$ — коммутативная подалгебра. Поскольку все операторы умножения нильпотентны, то подалгебра $\varphi(V) \subset \mathfrak{l}$ унипотентна. $\square$

Теорема 4.16. *Билинейное отображение $\mu\colon \mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$ является билинейным отображением, ассоциированным с коммутативной унипотентной подалгеброй $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^-$, дополнительной к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, тогда и только тогда, когда μ — умножение, согласованное с присоединённым действием алгебры $\mathfrak{l}$ на алгебре $\mathfrak{u}^-$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^-$ — коммутативная унипотентная подалгебра, дополнительная к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$, ассоциированное с подалгеброй $\mathfrak{a}$. По лемме 4.8, $\varphi(\mathfrak{u}^-) \subset \mathfrak{l}$ — коммутативная унипотентная подалгебра, поэтому $[\varphi(u), \varphi(v)] = 0$ для любых элементов $u, v \in \mathfrak{u}^-$. Подалгебры $\mathfrak{u}^- \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ также коммутативны, поэтому $0 = [u+\varphi(u), v+\varphi(v)] = [u, \varphi(v)]+[\varphi(u), v]$. Следовательно, $[\varphi(u), v] = [\varphi(v), u]$, и билинейное отображение $\mu\colon \mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$, ассоциированное с линейным отображением φ, коммутативно. Рассмотрим ещё один элемент $w \in \mathfrak{u}^-$. По тождеству Якоби, $0 = [w, [\varphi(u), \varphi(v)]] = [[w, \varphi(u)], \varphi(v)] + [\varphi(u), [w, \varphi(v)]] = [\varphi(v), [\varphi(u), w]] - [\varphi(u), [\varphi(v), w]]$. В терминах билинейного отображения это можно записать как $\mu(v, \mu(u, w)) = \mu(u, \mu(v, w))$, но мы уже знаем, что билинейное отображение коммутативно, поэтому $\mu(\mu(u, w), v) = \mu(u, \mu(w, v))$, и билинейное отображение ассоциативно. Возможность записать все операторы умножения в виде $\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{u}^-}$, где $x \in \mathfrak{l}$, прямо следует из определений отображений φ и μ. Наконец, все операторы $\mu_u = \operatorname{ad}\varphi(u)|_{\mathfrak{u}^-}$, где $u \in \mathfrak{u}^-$, нильпотентны по лемме 4.8.

Теперь пусть μ — умножение на алгебре $\mathfrak{u}^-$, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда, поскольку представление $\mathfrak{l} : \mathfrak{u}^-$ точное, то по лемме 4.13, существует линейное описание φ отображения μ, другими словами, $\varphi\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{u}^-$ — это такое линейное отображение, что $\operatorname{ad}\varphi(u)|_{\mathfrak{u}^-} = \mu_u$ для любого элемента $u \in \mathfrak{u}^-$. Поскольку умножение μ коммутативно, то $[\varphi(u), v] = \mu(u, v) = \mu(v, u) = [\varphi(v), u]$ для любых элементов $u, v \in \mathfrak{u}^-$. По лемме 4.15, подалгебра $\varphi(\mathfrak{u}^-) \subset \mathfrak{l}$ коммутативна, поэтому $[\varphi(u), \varphi(v)] = 0$. Используя коммутативность алгебры $\mathfrak{u}^-$, получаем, что $[u+\varphi(u), v+\varphi(v)] = [u, \varphi(v)] + [\varphi(u), v] + [\varphi(u), \varphi(v)] = 0$, и подпространство $\mathfrak{a} = \{u + \varphi(u) \mid u \in \mathfrak{u}^-\}$ на самом деле является коммутативной подалгеброй.

По лемме 4.15, подалгебра $\varphi(\mathfrak{u}^-) \subset \mathfrak{l}$ унипотентна, поэтому её можно вложить в некоторую максимальную унипотентную подалгебру алгебры $\mathfrak{l}$. Все максимальные унипотентные подалгебры алгебры $\mathfrak{l}$ сопряжены, поэтому существует такой элемент $l \in L$, что $(\operatorname{Ad} l)\varphi(\mathfrak{u}^-) \subseteq \mathfrak{u}_1^- \cap \mathfrak{l}$. Но тогда $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a} \subseteq (\operatorname{Ad} l)\mathfrak{u}^- + (\operatorname{Ad} l)\varphi(\mathfrak{u}^-) = \mathfrak{u}^- + (\operatorname{Ad} l)\varphi(\mathfrak{u}^-) \subseteq \mathfrak{u}_1^-$, поэтому $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a}$ — унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, а тогда и $\mathfrak{a}$ — унипотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$.

Наконец, проверим, что подалгебра $\mathfrak{a}$ дополнительна к подалгебре $\mathfrak{p}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Допустим сначала, что $a \cap \mathfrak{p} \neq 0$. Тогда существует такой элемент $u \in \mathfrak{u}^-$, что $u + \varphi(u) \in \mathfrak{p}$ и $u + \varphi(u) \neq 0$. Тогда $u \neq 0$, $\varphi(u) \in \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$, и $u \in \mathfrak{p}$. Но $\mathfrak{u}^- \cap \mathfrak{p} = 0$, противоречие. Следовательно, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$. Теперь, поскольку $\mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, то любой элемент $g \in \mathfrak{g}$ может быть записан в виде $g = u + p$, где $u \in \mathfrak{u}^-$ и $p - \varphi(u) \in \mathfrak{p} + \mathfrak{l} = \mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. $\square$

Таким образом, чтобы найти все локально транзитивные $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P, достаточно найти все умножения на алгебре $\mathfrak{u}^-$, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Эта задача естественно обобщается следующим образом: для данного конечномерного представления V связной редуктивной группы L требуется найти все умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$.

4.3. Общие сведения об умножениях, согласованных с действием алгебры

В этом разделе мы фиксируем связную редуктивную группу L и некоторое её (не обязательно точное) конечномерное представление V. Тогда алгебра $\mathfrak{l}$ также действует в пространстве V. Обозначим соответствующий гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$ за ρ. Начиная с этого раздела, если задано умножение на пространстве V, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, мы обозначаем произведение двух векторов $u, v \in V$ как uv, а не как $\mu(u, v)$. Наша цель — классифицировать умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$.

Сначала сведём эту задачу к неприводимому представлению простой группы.

Предложение 4.17. *Пусть L — связная редуктивная группа, $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$. Пусть V — конечномерное представление группы L, на котором существует ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Пусть $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ — разложение алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ на простые слагаемые. Тогда, после подходящей перестановки алгебр $\mathfrak{l}_i$, существует такое разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, где слагаемые V_i являются неприводимыми представлениями группы L, и такой индекс r ($r \leq s$, $r \leq t$), что:*

1. *V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$ при $1 \leq i \leq r$.*
2. *$\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$.*
3. *$V_i V_j = 0$ при $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$.*
4. *$\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \leq i \leq r$, $r < j \leq t$.*
5. *$\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $r < i \leq s$, $1 \leq j \leq r$.*
6. *$V_i V = 0$ при $r < i \leq t$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай *полупростой* алгебры $\mathfrak{l}$ и её *неприводимого* представления V. В этом случае предложение сводится к следующей лемме.

Лемма 4.18. *Пусть $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ — её разложение на простые слагаемые, и V — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$. Предположим, что на пространстве V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$.*

Тогда существует такой индекс k ($1 \leq k \leq s$), что $\mathfrak{l}_i V = 0$ при $i \neq k$.

Доказательство. Обозначим за $\rho \colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$ соответствующий гомоморфизм алгебр Ли. Любое неприводимое представление полупростой алгебры Ли можно записать как тензорное произведение неприводимых представлений её простых слагаемых, поэтому запишем представление V в виде $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_s$, где V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$. Обозначим за I множество таких индексов i, что представление V_i нетривиально. Достаточно доказать, что множество I состоит из одного элемента. Если множество I пусто, то всё представление V тривиально, и, по определению умножения, согласованного с действием алгебры, все операторы умножения должны быть нулевыми, и умножение тривиально. Допустим теперь, что множество I содержит хотя бы два элемента.

Обозначим $\widehat{\mathfrak{l}} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{l}_i$. Все представления V_i, где $i \in I$, нетривиальны и, следовательно, эффективны, поэтому V — эффективное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{l}}$. Проверим, что умножение на пространстве V также согласовано с действием алгебры $\widehat{\mathfrak{l}}$. Единственное нетривиальное условие в определении умножения, согласованного с действием алгебры, в этом случае состоит в том, что для любого вектора $v \in V$ должен существовать такой элемент $x \in \widehat{\mathfrak{l}}$, что $\mu_v = \rho(x)$. Мы знаем пока только, что существует элемент $z \in \mathfrak{l}$, такой что $\mu_v = \rho(z)$, поскольку умножение согласовано с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Поскольку $\mathfrak{l} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus (\bigoplus_{i \notin I} \mathfrak{l}_i)$, то этот элемент z можно разложить как $z = x + y$, где $x \in \widehat{\mathfrak{l}}$ и $y \in \bigoplus_{i \notin I} \mathfrak{l}_i$. Имеем $\rho(z) = \rho(x) + \rho(y)$. Все простые слагаемые $\mathfrak{l}_i$, где $i \notin I$, лежат в ядре гомоморфизма ρ, поэтому $\rho(y) = 0$, и $\rho(x) = \rho(z) = \mu_v$.

По лемме 4.13, существует единственное линейное описание φ умножения, другими словами, $\varphi\colon V \to \widehat{\mathfrak{l}}$ — это такое линейное отображение, что $vw = \rho(\varphi(v))w$ для всех векторов $v, w \in V$. Это отображение не может быть нулевым, иначе умножение было бы тривиальным. Выберем такой индекс $k \in I$, что существует вектор $v \in V$, такой что проекция элемента $\varphi(v)$ (в смысле разложения $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$) на алгебру $\mathfrak{l}_k$ ненулевая. Обозначим $\widetilde{\mathfrak{l}} = \bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} \mathfrak{l}_i$, $W = \bigotimes_{i \in I \setminus \{k\}} V_i$. Тогда V_k — точное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_k$. Поскольку мы предположили, что множество I содержит хотя бы два элемента, то $\dim W > 1$, и W — точное неприводимое представление алгебры $\widetilde{\mathfrak{l}}$. Обозначим соответствующие гомоморфизмы алгебр Ли $\mathfrak{l}_k \to \mathfrak{gl}(V_k)$ и $\widetilde{\mathfrak{l}} \to \mathfrak{gl}(W)$ за ρ_{V_k} и ρ_W, соответственно.

Наша ближайшая цель — доказать, что $\varphi(V) \subseteq \mathfrak{l}_k$. Допустим противное. Тогда существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(v) = x + y$, где $x \in \mathfrak{l}_k$, $y \in \widetilde{\mathfrak{l}}$, и $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Теперь рассмотрим произвольный вектор $w \in V$ и разложим элемент $\varphi(w)$ как $\varphi(w) = x' + y'$, где $x' \in \mathfrak{l}_k$, $y' \in \widetilde{\mathfrak{l}}$. Тогда $\rho(x'+y') = \rho_{V_k}(x') \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_{V_k} \otimes \rho_W(y')$. Поскольку алгебры $\mathfrak{l}_k$ и $\widetilde{\mathfrak{l}}$ полупросты, то $\operatorname{tr} \rho_{V_k}(x') = \operatorname{tr} \rho_W(y') = 0$. Имеем следующее разложение пространства $\mathfrak{gl}(V)$ в прямую сумму подпространств.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(V_k) \otimes \mathfrak{gl}(W) = \\
\langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \oplus \langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \mathfrak{sl}(W) \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \mathfrak{sl}(W).
\end{aligned}
$$

Оператор $\rho(x' + y')$ лежит в сумме второго и третьего слагаемых в этом разложении. Другими словами, для любого вектора $w \in V$ оператор умножения на w лежит в пространстве $\langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \mathfrak{sl}(W) \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \subset \mathfrak{gl}(V)$.

В частности, это верно для $w = v^2$. Поскольку умножение на пространстве V ассоциативно, то $\mu_{v^2} = (\rho(x + y))^2 = (\mathrm{id}_{V_k} \otimes \rho_W(y) + \rho_{V_k}(x) \otimes \mathrm{id}_W)^2 = \mathrm{id}_{V_k} \otimes (\rho_W(y)^2) + (\rho_{V_k}(x)^2) \otimes \mathrm{id}_W + 2\rho_{V_k}(x) \otimes \rho_W(y)$. Мы знаем, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ и что линейные отображения ρ_{V_k} и ρ_W инъективны, поэтому последнее слагаемое не равно нулю и лежит в подпространстве $\mathfrak{sl}(V_k)\otimes\mathfrak{sl}(W) \subset \mathfrak{gl}(V)$, противоречие. Следовательно, $\varphi(V) \subseteq \mathfrak{l}_k$. Обозначим $d = \dim W$. Напомним, что $d > 1$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_d$ пространства W. Тогда пространство V можно разложить в прямую сумму $\mathfrak{l}_k$-инвариантных подпространств $V'_j = V_k \otimes \langle e_j \rangle$, где $1 \leq j \leq d$. Эти подпространства как представления алгебры $\mathfrak{l}_k$ изоморфны представлению V_k. Можно считать, что существует такой индекс j и такой вектор $v \in V'_j$, что $\mu_v \neq 0$. Тогда $\varphi(v) \neq 0$, и элемент $\varphi(v) \in \mathfrak{l}_k$ нетривиально действует на всех подпространствах $V'_{j'}$, где $1 \leq j' \leq d$. В частности, существует такой индекс $j' \neq j$ и такой вектор $w \in V'_{j'}$, что $\rho(\varphi(v))w \neq 0$. Поскольку действие алгебры $\mathfrak{l}_k$ сохраняет пространство $V'_{j'}$, то $\rho(\varphi(v))w \in V'_{j'}$. В терминах умножения это означает, что $vw \neq 0$ и $vw \in V'_{j'}$. Но $wv = vw$, и, рассуждая аналогично, можно доказать, что $wv \in V'_j$, противоречие. $\square$

Теперь докажем предложение 4.17 в полной общности. Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$ — разложение представления V на неприводимые слагаемые. Выберем два индекса $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$ и выберем произвольные векторы $v \in V_i$ и $w \in V_j$. Поскольку умножение на пространстве V согласовано с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то существуют такие элементы $x, y \in \mathfrak{l}$, что $\mu_v = \rho(x)$ и $\mu_w = \rho(y)$. Действие алгебры $\mathfrak{l}$ сохраняет подпространство $V_j \subset V$, поэтому $vw = \rho(x)w \in V_j$. С другой стороны $\rho(\mathfrak{l})V_i \subseteq V_i$, поэтому $wv = \rho(y)v \in V_i$. Но $vw = wv$, поэтому $vw = 0$. Следовательно, $V_iV_j = 0$ для любых двух индексов $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$. Обозначим за r число таких индексов i $(1 \leq i \leq t)$, что $V_iV_i \neq 0$. Не ограничивая общности, $V_iV_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq r$, и $V_iV_i = 0$ при $r < i \leq t$.

Лемма 4.19. *Пусть L — связная редуктивная группа, а V — конечномерное представление группы L. Пусть на пространстве V задано умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда это умножение согласовано также и с действием алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$.*

Доказательство. Обозначим за T_1 связную компоненту центра группы L. Обозначим $\mathfrak{t}_1 = \mathrm{Lie}\, T_1$. Пусть $v \in V$ — произвольный вектор. Тогда существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что $\rho(x) = \mu_v$. Алгебру $\mathfrak{l}$ можно разложить в прямую сумму подалгебр $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ и $\mathfrak{t}_1$. Разложим $x = y+z$, где $y \in [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, $z \in \mathfrak{t}_1$. По лемме Шура, элемент z действует на каждом пространстве V_i как скалярный оператор. Поскольку алгебра $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ полупростая, то элемент y действует на каждом пространстве V_i как оператор со следом 0. Оператор $\rho(x)$ нильпотентен, поскольку это оператор умножения на вектор v, поэтому его ограничение на каждое подпространство V_i также имеет след 0. Следовательно, оператор $\rho(z)|_{V_i} = (\rho(x) - \rho(y))|_{V_i}$ скалярный и имеет след 0, т. е. $\rho(z)|_{V_i} = 0$ для любого индекса i, поэтому $\rho(z) = 0$, и $\rho(y) = \mu_v$. Следовательно, для любого вектора $v \in V$ существует элемент алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, который действует на пространстве V так же, как и оператор μ_v, и умножение на пространстве V согласовано с действием алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. $\square$

Вернёмся к доказательству предложения 4.17. Теперь, зная лемму 4.19, мы можем применить лемму 4.18 к алгебре $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ и к каждому из представлений V_i, где $1 \leq i \leq r$. Разложим алгебру $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ в прямую сумму простых слагаемых: $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$. По лемме 4.18, для любого индекса i $(1 \leq i \leq r)$ существует ровно один индекс k, такой что алгебра $\mathfrak{l}_k$ действует на пространстве V_i нетривиально. Выберем такой вектор $v \in V_i$, что $\mu_v \neq 0$. Тогда существует элемент $x_k \in \mathfrak{l}_k$, $x_k \neq 0$, который действует на пространстве V так же, как оператор μ_v. Выберем индекс j, $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$. Действие алгебры $\mathfrak{l}_k$ на пространстве V_j может быть либо тривиальным, либо точным. Если оно точное, то $\rho(x_k)V_j \neq 0$, $\rho(x_k) = \mu_v$, но $V_iV_j = 0$, противоречие. Поэтому алгебра $\mathfrak{l}_k$ тривиально действует на пространстве V_j. В частности, мы видим, что если $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$, и подалгебры $\mathfrak{l}_k$ и $\mathfrak{l}_{k'}$ — это те прямые слагаемые в разложении выше, которые действуют на пространствах V_i и V_j (соответственно), то $k \neq k'$. Другими словами, $s \geq r$, и не ограничивая общности, мы можем считать, что единственное прямое слагаемое, которое действует нетривиально на пространстве V_i $(1 \leq i \leq r)$ — это алгебра $\mathfrak{l}_i$. Алгебры $\mathfrak{l}_j$, где $j > r$, обязаны действовать тривиально на всех представлениях V_i, где $1 \leq i \leq r$, и они могут действовать произвольным образом на подпредставлениях V_i, где $r < i \leq t$. $\square$

Неформально говоря, предложение 4.17 утверждает, что представление $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] : V$ может быть разбито в прямую сумму двух частей, "нетривиальной части" $\mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_r : V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ и "тривиальной части" $\mathfrak{l}_{r+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s : V_{r+1} \oplus \ldots \oplus V_t$. "Тривиальная часть" алгебры или "тривиальная часть" представления (или обе) могут быть нулевыми. Действие "тривиальной части" алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ на "нетривиальной части" представления V нулевое, так же как и действие "нетривиальной части" алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ на "тривиальной части" представления V. Умножение между "нетривиальной" и "тривиальной" частями пространства V нулевое, так же как и умножение внутри "тривиальной" части пространства V. "Нетривиальные части" алгебры $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ и представления V могут быть разложены в прямые суммы простых алгебр и неприводимых представлений *каждой из простых алгебр*. Умножение между различными неприводимыми подпредставлениями внутри "нетривиальной части" пространства V также нулевое.

Подчеркнём, что торические приямые слагаемые в алгебре $\mathfrak{l}$ и "тривиальное" прямое слагаемое $\mathfrak{l}_{r+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ играют разную роль. "Тривиальное" слагаемое $\mathfrak{l}_{r+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ обязано действовать на пространстве $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ тривиально, иначе ненулевых умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не будет вообще. А торические слагаемые могут действовать нетривиально на пространстве $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, это не влияет на наличие ненулевых умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Вообще говоря, может оказаться так, что два умножения, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, находятся в одном и том же классе L-сопряжённости, но в разных классах сопряжённости относительно действия полупростой части группы L. Мы подробно обсудим классификацию умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, в случае редуктивной группы L с нетривиальным центральным тором в разделе 4.4.9.

Далее будем рассматривать неприводимые представления простых групп.

Если V — неприводимое представление связной простой алгебраической группы L, то, по лемме 4.13, для любого умножения на пространстве V, согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$, существует единственное линейное описание, и оно является линейным отображением из пространства V в алгебру $\mathfrak{l}$. Обозначим множество линейных описаний всех умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, за $K_{\mathfrak{l},V} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathfrak{l})$. Группа L действует на множестве умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, следующим образом. Если $l \in L$ — произвольный элемент, и $\mu\colon V \times V \to V$ — умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то $(l \cdot \mu)(v, w) = l\mu(l^{-1}v, l^{-1}w)$ для любых векторов $v, w \in V$.

Лемма 4.20. *Пусть L — связная простая алгебраическая группа, и пусть V — некоторое её нетривиальное неприводимое представление. Тогда множество $K_{\mathfrak{l},V}$ является замкнутым конусом в пространстве* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathfrak{l}) = V^* \otimes \mathfrak{l}$. *Биекция между множеством умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, и конусом $K_{\mathfrak{l},V}$ L-эквивариантна.*

Доказательство. Существование биекции следует из леммы 4.13, а тот факт, что она L-эквивариантна, напрямую следует из определения линейного описания умножения.

Обозначим действие элемента $x \in \mathfrak{l}$ на пространстве V за $\rho(x)$. Любое линейное отображение $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$ позволяет определить умножение по правилу $vw = \rho(\varphi(v))w$. Выберем базисы в пространствах V и $\mathfrak{l}$, тогда линейные отображения $V \to \mathfrak{l}$ будут записываться матрицами размера $(\dim V) \times (\dim \mathfrak{l})$. Линейные операторы из пространства V в себя также будут записываться матрицами размера $(\dim V) \times (\dim V)$, и элементы матрицы оператора $\rho(x)$ линейно зависят от элемента $x \in \mathfrak{l}$. Умножение коммутативно тогда и только тогда, когда $\rho(\varphi(v))w = \rho(\varphi(w))v$ для любых векторов $v, w \in V$. Это уравнение билинейно по v и w, поэтому достаточно, чтобы оно было выполнено для векторов v и w из выбранного базиса пространства V. А если v и w зафиксированы, то это уравнение можно рассматривать как линейное уравнение на элементы матрицы отображения φ. Если мы уже знаем, что умножение коммутативно, то оно ассоциативно тогда и только тогда, когда $u(vw) = v(uw)$ для всех векторов $u, v, w \in V$, другими словами, тогда и только тогда, когда $\rho(\varphi(u))\rho(\varphi(v))w = \rho(\varphi(v))\rho(\varphi(u))w$ для всех векторов $u, v, w \in V$, или, что равносильно, когда для линейных операторов на пространстве V выполнено равенство $\rho(\varphi(u))\rho(\varphi(v)) = \rho(\varphi(v))\rho(\varphi(u))$ для любых векторов $u, v \in V$. Это уравнение также билинейно по u и v, и если u и v зафиксированы, то оно становится однородным уравнением степени 2 на элементы матрицы отображения φ. Наконец, линейный оператор на пространстве V нильпотентен тогда и только тогда, когда его $(\dim V)$-я степень равна нулю, или, что равносильно, когда его $((\dim V)^2)$-я степень равна нулю. Если мы уже знаем, что все операторы умножения коммутируют друг с другом, то все операторы умножения нильпотентны тогда и только тогда, когда $(\dim V)$-е степени всех операторов вида μ_v, где v — вектор из выбранного базиса пространства V, равны нулю, другими словами, тогда и только тогда, когда $(\rho(\varphi(v)))^{\dim V} = 0$ для любого вектора v из выбранного базиса пространства V. И снова, для фиксированного вектора $v \in V$ это однородное уравнение степени $\dim V$ на элементы матрицы отображения φ. Следовательно, подмножество $K_{\mathfrak{l},V} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathfrak{l})$ задаётся несколькими однородными уравнениями, и поэтому является замкнутым конусом в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathfrak{l})$. $\square$

Предложение 4.21. *Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{b}_0$ — некоторая её борелевская подалгебра, и $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{b}_0$ — некоторая картановская подалгебра. Обозначим соответствующую систему корней за Ψ, соответствующую систему весов за $\mathfrak{X}$, и соответствующую полугруппу доминантных весов за $\mathfrak{X}^+$. Пусть $\nabla = \{\beta_1, \ldots, \beta_{\mathrm{rk}\,\mathfrak{l}}\}$ — соответствующее множество простых корней. Пусть V — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$ со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{X}^+$, на котором можно ввести умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$.*

Тогда λ — фундаментальный вес. Более того, пусть λ соответствует простому корню β_i. Обозначим соответствующий простой корень в двойствен-

ной системе корней $\Psi^\vee$ *за* $\beta_i^\vee$*. Тогда корень* $\beta_i^\vee$ *встречается в разложении максимального короткого корня системы* $\Psi^\vee$ *в сумму простых корней ровно один раз (т. е. с коэффициентом 1).*

Доказательство. Выберем вектор $v \in V$, так чтобы $\mu_v \neq 0$. Поскольку оператор μ_v нильпотентен, то существует такое число $k \in \mathbb{N}$, что $(\mu_v)^k \neq 0$, но $(\mu_v)^{2k} = 0$. Поскольку умножение ассоциативно, то $(\mu_v)^k = \mu_{v^k}$. Следовательно, существует такой элемент $z \in \mathfrak{l}$, что $\rho(z) \neq 0$, но $\rho(z)^2 = 0$. Для каждого простого корня β выберем элементы $x_\beta \in \mathfrak{l}_\beta$, $y_\beta \in \mathfrak{l}_{-\beta}$, так что вместе с $h_\beta = [x_\beta, y_\beta]$ они образуют стандартный базис алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим также $h_{-\beta} = -h_\beta$. Обозначим фундаментальный вес, соответствующий простому корню β_i, за ϖ_i.

Обозначим максимальный корень системы Ψ за γ. Поскольку z — нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{l}$, то замыкание его орбиты при присоединённом действии группы L на алгебре $\mathfrak{l}$ содержит элемент y_γ. Следовательно, $\rho(y_\gamma)^2 = 0$. В частности, если разложить пространство V в прямую сумму неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2 = \langle x_\gamma, y_\gamma, h_\gamma \rangle$, то размерность каждого прямого слагаемого будет не больше 2. Поэтому собственные значения оператора $\rho(h_\gamma)$ могут быть равны только -1, 0 и 1. В частности, $\lambda(h_\gamma)$ — это собственное значение оператора $\rho(h_\gamma)$, соответствующее старшему весовому подпространству представления V, поэтому $\lambda(h_\gamma)$ может быть равно либо 1, либо 0. Запишем $\lambda = \sum a_i \varpi_i$. Заметим, что все коэффициенты a_i не могут одновременно обратиться в ноль, иначе представление V было бы тривиально, $\rho(\mathfrak{l}) = 0$, и умножение на пространстве V также должно было бы быть тривиальным.

Зафиксируем инвариантное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на алгебре $\mathfrak{l}$. Оно отождествляет пространства $\mathfrak{t}_0$ и $\mathfrak{t}_0^*$, и если $\beta \in \Psi$, то элемент $h_\beta \in \mathfrak{t}_0$ отождествляется с

$$\frac{2\beta}{(\beta,\beta)} \in \mathfrak{t}_0^*.$$

Поэтому все векторы h_β (для всех корней $\beta \in \Psi$) образуют систему корней, двойственную к системе Ψ, в пространстве $\mathfrak{t}_0$. Множество векторов h_β, где $\beta \in \nabla$

пробегает простые корни системы Ψ, можно считать множеством простых корней этой двойственной системы. Тогда h_γ — максимальный короткий корень этой системы. Запишем $h_\gamma = \sum b_j h_{\beta_j}$. Все числа b_i целые и положительные (см. [14, §12.2, Table 2]). Имеем $\lambda(h_\gamma) = \sum a_i \varpi_i(h_\gamma) \leq 1$. Вспомним, что по определению фундаментального веса, $\varpi_i(h_{\beta_j}) = \delta_{ij}$, поэтому $\lambda(h_\gamma) = \sum a_i b_i$. Следовательно, ровно один из коэффициентов a_i не равен нулю, этот коэффициент a_j обязан быть равен единице (т. е. $\lambda = \varpi_j$), и индекс j должен удовлетворять равенству $b_j = 1$. $\square$

Это предложение существенно ограничивает множество пар $(\mathfrak{l}, V)$, для которых можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Именно, если $\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, нужно рассмотреть все фундаментальные представления, если $\mathfrak{l}$ — алгебра типа B_l, нужно рассмотреть тавтологическое и спинорное представления, если $\mathfrak{l}$ — алгебра типа C_l, нужно рассмотреть все фундаментальные представления, если $\mathfrak{l}$ — алгебра типа D_l, нужно рассмотреть тавтологическое и два полуспинорных представления (одно из них переводится в другое диаграммным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}$), если $\mathfrak{l}$ — алгебра типа E_6, E_7, F_4 или G_2, нужно рассмотреть только представления минимальной размерности.

4.4. Существование умножений, согласованных с действием алгебры

В этом разделе L — связная простая алгебраическая группа, а $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$ — простая алгебра Ли. Пусть $B_0 \subset L$ — некоторая борелевская подгруппа группы L, и пусть $T_0 \subset B_0$ — некоторый максимальный тор. Обозначим $\mathfrak{b}_0 = \operatorname{Lie} B_0$, $\mathfrak{t}_0 = \operatorname{Lie} T_0$. Пусть Ψ — соответствующая система корней, пусть Ψ^+ — подмножество положительных корней, и пусть $\nabla = \{\beta_1, \ldots, \beta_{\operatorname{rk}\mathfrak{l}}\}$ — множество простых корней. Обозначим унипотентный радикал группы B_0 за U_0, $\mathfrak{u}_0 = \operatorname{Lie} U_0$.

Для каждого простого корня β выберем элементы $x_\beta \in \mathfrak{l}_\beta$, $y_\beta \in \mathfrak{l}_{-\beta}$, так что вместе с $h_\beta = [x_\beta, y_\beta]$ они образуют стандартный базис алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Если $\beta = \beta_i$ — простой корень, будем коротко писать $x_{\beta_i} = x_i$, $y_{\beta_i} = y_i$ и $h_{\beta_i} = h_i$.

Обозначим решётку характеров тора T_0 за $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}^+$ — подполугруппа доминантных весов по отношению к группе B_0. Обозначим фундаментальный вес, соответствующий простому корню β_i, за ϖ_i. Если λ — доминантный вес и $V_\mathfrak{l}(\lambda)$ — неприводимое представление, обозначим старший вес двойственного представления $V_\mathfrak{l}(\lambda)^*$ за λ^*. Тогда младший вес представления $V_\mathfrak{l}(\lambda)$ равен $-\lambda^*$.

Пусть V — неприводимое представление группы L, удовлетворяющее условиям предложения 4.21. Обозначим соответствующий гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$ за ρ. Обозначим за $R(\mathfrak{l})$ алгебру $\mathfrak{l}$, понимаемую как присоединённое представление алгебры $\mathfrak{l}$.

Сначала мы будем классифицировать сами умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, а не их классы L-сопряжённости. Чтобы сформулировать соответствующую теорему, нам понадобится следующее определение.

Определение 4.22. Пусть ω — невырожденная билинейная форма на пространстве V ($\omega\colon V \times V \to \mathbb{C}$). Тогда, если на пространстве V задано умножение, назовём трилинейную форму c, определённую как $c(u, v, w) = \omega(uv, w)$, где $u, v \in V$, *трилинейной формой, двойственной к умножению.*

Ясно, что, поскольку форма ω невырожденная, то умножение однозначно восстанавливается по трилинейной форме, двойственной к нему.

Теорема 4.23. *Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, а V — некоторое её неприводимое представление, на котором можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей:*

1. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, V — тавтологическое представление или двойственное к нему. Тогда любое коммутативное ассоциативное умноже-*

ние, для которого все операторы умножения нильпотентны, согласовано с действием алгебры $\mathfrak{l}$.

2. $\mathfrak{l}$ *— алгебра типа* C_l $(l \geq 2)$, V *— тавтологическое представление. Тогда группа* L *сохраняет некоторую кососимметрическую билинейную форму* ω *на пространстве* V, *и трилинейные формы, двойственные к умножениям, согласованным с действием алгебры* $\mathfrak{l}$ *— это в точности такие полностью симметрические трилинейные формы* c *на пространстве* V, *что ядро* $\ker c$ *содержит некоторое лагранжево подпространство пространства* V *(т. е. существует такое лагранжево подпространство* $V_1 \subset V$, *что* $c(V_1, V, V) = 0$*).*

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем важное замечание насчёт её формулировки. А именно, подчеркнём, что если на $\mathfrak{l}$-модуле V существует умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то пара $(\mathfrak{l}, V)$ упомянута в формулировке теоремы только один раз, в то время как алгебра $\mathfrak{l}$ может быть изоморфна нескольким классическим алгебрам Ли (принадлежащим нескольким различным сериям). Приведём список случаев, в которых существуют нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, но которые не упомянуты напрямую в формулировке теоремы.

1. $\mathfrak{so}_5$ — алгебра типа B_2, и она изоморфна алгебре $\mathfrak{sp}_4$, т. е. алгебре типа C_2. Этот изоморфизм отождествляет спинорное представление алгебры $\mathfrak{so}_5$ с тавтологическим представлением алгебры $\mathfrak{sp}_4$, поэтому нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{so}_5$, существуют, и их можно классифицировать, используя это отождествление и теорему 4.23.

2. $\mathfrak{so}_6$ иногда называют алгеброй типа D_3, и она изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_4$. Этот изоморфизм отождествляет два полуспинорных представления алгебры $\mathfrak{so}_6$ с тавтологическим и двойственным представлениями алгебры $\mathfrak{sl}_4$. Поэтому нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{so}_6$,

существуют и описываются так же, как умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{sl}_4$, на её тавтологическом и двойственном представлениях.

3. $\mathfrak{sp}_2$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2$, и тавтологическое представление алгебры $\mathfrak{sp}_2$ изоморфно тавтологическому представлению алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Для классификации умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, можно использовать любую часть теоремы 4.23.

4. $\mathfrak{so}_3$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2$, и спинорное представление алгебры $\mathfrak{so}_3$ изоморфно тавтологическому представлению алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{so}_3$, на её спинорном представлении, описываются так же, как умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{sl}_2$, на её тавтологическом представлении.

5. $\mathfrak{so}_4$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ и не является простой. Тем не менее, каждое полуспинорное представление алгебры $\mathfrak{so}_4$ изоморфно тензорному произведению тавтологического представления одной из алгебр $\mathfrak{sl}_2$ и тривиального представления другой из них. Поэтому нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{so}_4$ существуют и описываются как умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, на соответствующем тензорном произведении.

Теперь докажем теорему 4.23.

Доказательство. Начнём со следующих двух лемм, которые мы будем впоследствии использовать, чтобы доказать, что на некотором представлении не существует умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$.

Чтобы сформулировать первую из этих лемм, введём некоторые обозначения. Рассмотрим следующий $\mathfrak{l}$-эквивариантный гомоморфизм представлений: $\rho\colon R(\mathfrak{l}) \to \mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$. Он позволяет определить $\mathfrak{l}$-эквивариантное вложение представлений $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \hookrightarrow V^* \otimes V^* \otimes V$, и мы обозначим его за $\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho$.

Лемма 4.24. *Разложим представление $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ в прямую сумму неприводимых. Пусть оказалось, что все они попарно неизоморфны. Выберем в этих неприводимых подпредставлениях старшие векторы $v_1, v_2, \ldots$, и обозначим $w_i = (\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho)(v_i)$. Если $w_i \notin S^2(V^*) \otimes V \subseteq V^* \otimes V^* \otimes V$ для любого индекса i, то на пространстве V не существует нетривиальных умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$.*

Доказательство. Если даны два подпредставления в представлении $V^* \otimes V^* \otimes V$, причём одно из них неприводимо, то это неприводимое подпредставление либо содержится в другом подпредставлении, либо пересекает его тривиально. Поэтому тот факт, что $w_i \notin S^2(V^*) \otimes V \subseteq V^* \otimes V^* \otimes V$ обозначает, что всё неприводимое подпредставление, содержащее вектор w_i (оно существует, поскольку $w_i = (\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho)(v_i)$, а v_i — старший вектор в неприводимом представлении) пересекает подпредставление $S^2(V^*) \otimes V \subseteq V^* \otimes V^* \otimes V$ тривиально. Поскольку среди неприводимых подпредставлений представления $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ нет изоморфных, то все (не обязательно неприводимые) подпредставления представления $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ — это в точности прямые суммы подпредставлений, порождённых векторами v_i. Следовательно, весь образ вложения $\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho$ пересекает подпространство $S^2(V^*) \otimes V \subseteq V^* \otimes V^* \otimes V$ тривиально.

Допустим, на пространстве V можно ввести нетривиальное умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Любое билинейное отображение $V \times V \to V$ определяется своим тензором структурных констант, который лежит в пространстве $V^* \otimes V^* \otimes V$. Билинейное отображение симметрично (коммутативно), если тензор структурных констант лежит в пространстве $S^2(V^*) \otimes V \subseteq V^* \otimes V^* \otimes V$. Условие, требующее, чтобы любой оператор умножения (слева) был равен оператору вида $\rho(x)$ (где $x \in \mathfrak{l}$), означает, что тензор структурных констант лежит в образе вложения $\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho$. Следовательно, если подпространства $S^2(V^*) \otimes V$ и $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ пересекаются в пространстве $V^* \otimes V^* \otimes V$ тривиально, то на пространстве V не существует нетривиальных умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$. $\square$

Чтобы проверить, лежит ли вектор w_i в пространстве $S^2(V^*) \otimes V$, можно рассмотреть канонически соответствующее этому вектору отображение $V^* \to V^* \otimes V^*$. Образ этого отображения содержится в пространстве $S^2(V^*)$ тогда и только тогда, когда $w_i \in S^2(V^*) \otimes V$.

Лемма 4.25. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ — доминантный вес, и $V = V_{\mathfrak{l}}(\lambda)$. Предположим, что на пространстве V существует нетривиальное умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда существует такой положительный корень $\gamma \in \Psi^+$, что:*

1. *$\gamma + \lambda^*$ — старший вес некоторого неприводимого подпредставления представления $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$.*
2. Не существует *таких весов $\nu \in \mathfrak{X}(V)$, что $\gamma + \nu \in \mathfrak{X}(V)$, но $\nu + \lambda^* + \gamma \notin \Psi^+$.*

Доказательство. По лемме 4.20, операция взятия линейного описания умножения L-эквивариантна и устанавливает биекцию между множеством умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, и замкнутым конусом $K_{\mathfrak{l},V} \subseteq V^* \otimes \mathfrak{l}$. В частности, действие группы L сохраняет конус $K_{\mathfrak{l},V} \subseteq V^* \otimes \mathfrak{l}$. Тот факт, что нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, существуют, означает, что конус $K_{\mathfrak{l},V}$ содержит точки, отличные от начала координат. Если $\varphi \in K_{\mathfrak{l},V}$, то пространство $\varphi(V) \subseteq \mathfrak{l}$ — коммутативная унипотентная подалгебра по лемме 4.15, и существует такой элемент $l \in L$, что $(\operatorname{Ad} l)(\varphi(V)) \subseteq \mathfrak{u}_0$. Применим элемент l к отображению φ и обозначим результат за $l \cdot \varphi$. Тогда отображение $l \cdot \varphi$ является линейным описанием некоторого другого умножения, согласованного с действием алгебры $\mathfrak{l}$, $(l \cdot \varphi)(V) \subseteq \mathfrak{u}_0$, и $l \cdot \varphi \neq 0$, если только $\varphi \neq 0$. Следовательно, поскольку мы предположили, что нетривиальные умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, существует, то пересечение $K_{\mathfrak{l},V} \cap V^* \otimes \mathfrak{u}_0$ также содержит точки, отличные от начала координат. Группа L уже не действует на этом пересечении, но группа $B_0 \subset L$

продолжает действовать.

Следовательно, проективизация конуса $K_{\mathfrak{l},V} \cap V^* \otimes \mathfrak{u}_0$ в проективном пространстве $\mathbf{P}(V^* \otimes \mathfrak{l})$ (обозначим её за $\mathbf{P}(K_{\mathfrak{l},V} \cap V^* \otimes \mathfrak{u}_0)$) замкнута, непуста, и группа B_0 действует на ней. Поскольку B_0 — борелевская подгруппа группы L, то в проективном многообразии $\mathbf{P}(K_{\mathfrak{l},V} \cap V^* \otimes \mathfrak{u}_0)$ существует точка, неподвижная относительно группы B_0. Поэтому конус $K_{\mathfrak{l},V} \cap V^* \otimes \mathfrak{u}_0$ содержит старший вектор некоторого неприводимого подпредставления представления группы L в пространстве $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$. Следовательно, если на пространстве V можно ввести умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то на пространстве V можно ввести и такое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, что его линейное описание $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$ является старшим вектором неприводимого подпредставления в $\mathfrak{l}$-модуле $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ и удовлетворяет условию $\varphi(V) \subseteq \mathfrak{u}_0$. Зафиксируем это умножение и его линейное описание φ, и обозначим вес вектора φ в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ за κ.

Младший вес представления V равен $-\lambda^*$. Пусть $v_{-\lambda^*} \in V$ — некоторый младший вектор. Тогда $\varphi(v_{-\lambda^*}) \in \mathfrak{l}_\gamma$, где $\gamma = \kappa - \lambda^*$.

Допустим сначала, что $\varphi(v_{-\lambda^*}) = 0$. Докажем, что тогда $\varphi = 0$. Действительно, φ — некоторый старший вектор в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$, поэтому $\mathfrak{u}_0 \cdot \varphi = 0$. Это означает, что для любого элемента $u \in \mathfrak{u}_0$ и для любого вектора $v \in V$ выполнено $-\varphi(\rho(u)v) + (\operatorname{ad} u)(\varphi(v)) = 0$. Другими словами, имеем следующее равенство линейных отображений из пространства V в алгебру $\mathfrak{l}$: $(\operatorname{ad} u) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(u)$. Пространство V линейно порождается образами вектора $v_{-\lambda^*}$ под действием произвольных произведений операторов вида $\rho(u)$, где $u \in \mathfrak{u}_0$. Тогда пространство $\varphi(V)$ линейно порождается образами вектора $\varphi(v_{-\lambda^*})$ под действием произведений операторов вида $\operatorname{ad} u$, где $u \in \mathfrak{u}_0$. Но $\varphi(v_{-\lambda^*}) = 0$, поэтому $\varphi(V) = 0$, т. е. $\varphi = 0$.

Пусть теперь $\varphi(v_{-\lambda^*}) \neq 0$. Тогда $\gamma \in \Psi \cup \{0\}$. Более того, на самом деле $\gamma \in \Psi^+$, поскольку мы предположили, что $\varphi(V) \subseteq \mathfrak{u}_0$. Допустим, существует такой вес $\nu \in \mathfrak{X}(V)$, что $\gamma + \nu \in \mathfrak{X}(V)$, и $\nu + \lambda^* + \gamma \notin \Psi^+$. Обозначим соответствующее весовое подпространство за $V_\nu \subseteq V$. Поскольку $\gamma \in \Psi^+$ — положительный корень, такой что $\gamma + \nu \in \mathfrak{X}(V)$, то из $\mathfrak{sl}_2$-теории следует, что ядро $\ker(\rho(\mathfrak{l}_\gamma)|_{V_\nu})$ имеет коразмерность не менее 1 в пространстве V_ν. Выберем произвольный вектор $w_\nu \in V_\nu$ вне этого ядра.

Вспомним, что отображение φ как вектор в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ имеет вес κ, поэтому $\varphi(V_\nu) \subseteq \mathfrak{l}_{\nu+\kappa} = \mathfrak{l}_{\nu+\lambda^*+\gamma}$. Но $\nu + \lambda^* + \gamma \notin \Psi^+$, поэтому $\varphi(V_\nu) = 0$. В частности, $w_\nu v_{-\lambda^*} = \rho(\varphi(w_\nu))v_{-\lambda^*} = 0$. С другой стороны, $w_\nu v_{-\lambda^*} = \rho(\varphi(v_{-\lambda^*}))w_\nu \neq 0$, поскольку мы так выбрали вектор w_ν. Противоречие. $\square$

Далее мы будем перебирать типы простых алгебр Ли и соответствующие фундаментальные веса, удовлетворяющие предложению 4.21. Если некоторый диаграммный автоморфизм алгебры Ли меняет местами два фундаментальных веса, то мы будем рассматривать только один из них. Эти рассуждения содержатся в разделах 4.4.1–4.4.8 и завершают доказательство теоремы 4.23.

4.4.1. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа A_l

Достаточно рассмотреть фундаментальные веса ϖ_1, ϖ_{l-1} и ϖ_p, где $2 < p \leq \lceil l/2 \rceil$.

Нам потребуется явное описание системы корней типа A_l. Рассмотрим евклидово пространство E с ортонормированным базисом $\{\widetilde{\varepsilon_i}\}$ $(1 \leq i \leq l+1)$, его подпространство $\langle \widetilde{\varepsilon_1} + \ldots + \widetilde{\varepsilon_{l+1}} \rangle$, и ортогональное дополнение к этому подпространству. Обозначим ортогональную проекцию $E \to \langle \widetilde{\varepsilon_1} + \ldots + \widetilde{\varepsilon_{l+1}} \rangle^\perp$ за q. Скалярные произведения векторов $\varepsilon_i = q(\widetilde{\varepsilon_i})$ записываются так: $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = l/(l+1)$ и $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -1/(l+1)$. Система корней типа A_l строится следующим образом: $\Psi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq l+1, i \neq j\}$. В качестве множества положительных корней можно взять $\Psi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$, тогда $\nabla = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq l\}$. Соответствующие фундаментальные веса выражаются так: $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq l)$.

4.4.1.1. $\lambda = \varpi_1$. Пусть группа SL_{l+1} действует в своём тавтологическом представлении V. Нильпотентный оператор на пространстве V всегда имеет след 0, поэтому существенными условиями на умножение на пространстве V являются только нильпотентность операторов умножения, коммутативность и ассоциативность.

4.4.1.2. $\lambda = \varpi_{l-1}$, $l > 2$. Воспользуемся леммой 4.24, чтобы доказать, что нетривиальных умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}_{l+1}$, и пусть $V^* = \Lambda^2 W$, где W — тавтологическое представление алгебры $\mathfrak{sl}_{l+1}$. Выберем базис $e_1, \ldots, e_{l+1}$ пространства W. Если это не ведёт к неоднозначности и путанице в обозначениях, мы будем использовать те же самые обозначения для линейных операторов на пространстве W и для элементов алгебры $\mathfrak{l}$. Рассмотрим следующие образующие Шевалле алгебры $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(W)$: $x_i = e_i \otimes e_{i+1}^*$, $y_i = e_{i+1} \otimes e_i^*$ и $h_i = e_i \otimes e_i^* - e_{i+1} \otimes e_{i+1}^*$. Также рассмотрим следующий базис пространства V^*: $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \le i < j \le l+1\}$. Вложение $R(\mathfrak{l}) \hookrightarrow V^* \otimes V$ переводит элемент $e_i \otimes e_j^* \in \mathfrak{l}$ в оператор $\sum_{k \neq i,j} e_i \wedge e_k \otimes (e_j \wedge e_k)^*$.

Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_l) \oplus V(2\varpi_1) \oplus V(\varpi_3 + \varpi_l) \oplus V(\varpi_2)$, и все неприводимые слагаемые различны. Найдём старшие векторы в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$.

1. Очевидно, вектор $e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^*$ имеет вес $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{l+1} = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_l$ и аннулируется алгеброй $\mathfrak{u}_0$, поэтому он является старшим вектором представления $V(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_l) \subset V^* \otimes R(\mathfrak{l})$. Вложение $\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho$ переводит его в тензор

$$\sum_{k=2}^{l} (e_1 \wedge e_2) \otimes (e_1 \wedge e_k) \otimes (e_{l+1} \wedge e_k)^*,$$

который не принадлежит подпространству $S^2(V^*) \otimes V$, поскольку $l > 2$.

2. Вектор $v = \sum_{i=2}^{l+1} e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^*$ аннулируется алгеброй $\mathfrak{u}_0$. Действительно, образующая Шевалле x_j аннулирует все слагаемые, кроме слагаемых с $i = j$ и $i = j+1$, и переводит их сумму $e_1 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_j^* + e_1 \wedge e_{j+1} \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^*$ в вектор

$-e_1\wedge e_j\otimes e_1\otimes e_{j+1}^*+e_1\wedge e_j\otimes e_1\otimes e_{j+1}^*=0$. Вектор v имеет вес $2\varepsilon_1+\varepsilon_i-\varepsilon_i=2\varpi_1$, поэтому он является старшим вектором в подпредставлении $V(2\varpi_1)\subset V^*\otimes R(\mathfrak{l})$. Вложение $\mathrm{id}_{V^*}\otimes\rho$ переводит этот вектор в тензор

$$\sum_{i=2}^{l+1}(e_1\wedge e_i)\otimes\sum_{j\neq i,1<j\leq l+1}(e_1\wedge e_j)\otimes(e_i\wedge e_j)^*$$
$$=\sum_{1<i<j\leq l+1}(e_1\wedge e_i\otimes e_1\wedge e_j-e_1\wedge e_j\otimes e_1\wedge e_i)\otimes(e_i\wedge e_j)^*\in\Lambda^2(V^*)\otimes V,$$

а $\Lambda^2(V^*)\otimes V\cap S^2(V^*)\otimes V=0$.

3. Проверим, что вектор $v=e_1\wedge e_3\otimes e_2\otimes e_{l+1}^*-e_2\wedge e_3\otimes e_1\otimes e_{l+1}^*-e_1\wedge e_2\otimes e_3\otimes e_{l+1}^*$ аннулируется подалгеброй $\mathfrak{u}_0$. Ясно, что все образующие Шевалле x_i, где $i>2$, аннулируют вектор v. После применения образующей Шевалле x_1 получаем вектор $e_1\wedge e_3\otimes e_1\otimes e_{l+1}^*-e_1\wedge e_3\otimes e_1\otimes e_{l+1}^*-e_1\wedge e_1\otimes e_3\otimes e_{l+1}^*=0$, а после применения образующей Шевалле x_2 получаем вектор $e_1\wedge e_2\otimes e_2\otimes e_{l+1}^*-e_2\wedge e_2\otimes e_1\otimes e_{l+1}^*-e_1\wedge e_2\otimes e_2\otimes e_{l+1}^*=0$.

Вектор v имеет вес $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_{l+1}=\varpi_3+\varpi_l$, поэтому он является старшим вектором в подпредставлении $V(\varpi_3+\varpi_l)\subset V^*\otimes R(\mathfrak{l})$. Чтобы проверить, что тензор $(\mathrm{id}_{V^*}\otimes\rho)(v)$ не лежит в пространстве $S^2(V^*)\otimes V$, мы проверим, что он определяет отображение $V^*\to V^*\otimes V^*$, образ которого не содержится в подпространстве $S^2(V^*)$. Действительно, если мы применим это отображение к вектору $e_l\wedge e_{l+1}\in V^*$, то получим тензор $(e_1\wedge e_3)\otimes(e_l\wedge e_2)-(e_2\wedge e_3)\otimes(e_l\wedge e_1)-(e_1\wedge e_2)\otimes(e_l\wedge e_3)\notin S^2(V^*)$. (При $l=3$, имеем $(e_1\wedge e_3)\otimes(e_l\wedge e_2)-(e_2\wedge e_3)\otimes(e_l\wedge e_1)-(e_1\wedge e_2)\otimes(e_l\wedge e_3)=(e_1\wedge e_3)\otimes(e_3\wedge e_2)-(e_2\wedge e_3)\otimes(e_3\wedge e_1)\in\Lambda^2(V^*)$.)

4. Проверим, что следующий вектор аннулируется подалгеброй $\mathfrak{u}_0$:

$$v=\sum_{i=3}^{l+1}(e_1\wedge e_i\otimes e_2\otimes e_i^*-e_2\wedge e_i\otimes e_1\otimes e_i^*+\frac{l-3}{2}e_1\wedge e_2\otimes e_i\otimes e_i^*)$$
$$+\frac{l-1}{2}e_1\wedge e_2\otimes(e_1\otimes e_1^*+e_2\otimes e_2^*).$$

Действительно, образующая Шевалле x_j, где $j \geq 3$, аннулирует каждое слагаемое, кроме слагаемых с $i = j$ и $i = j+1$, а их сумму

$$\begin{aligned}(e_1 \wedge e_j \otimes e_2 \otimes e_j^* - e_2 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_j^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_j \otimes e_j^*)\\ + (e_1 \wedge e_{j+1} \otimes e_2 \otimes e_{j+1}^* - e_2 \wedge e_{j+1} \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_{j+1} \otimes e_{j+1}^*)\end{aligned}$$

переводит в вектор

$$\begin{aligned}- e_1 \wedge e_j \otimes e_2 \otimes e_{j+1}^* + e_2 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^* - \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_j \otimes e_{j+1}^*\\ + e_1 \wedge e_j \otimes e_2 \otimes e_{j+1}^* - e_2 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_j \otimes e_{j+1}^* = 0.\end{aligned}$$

Единственные два слагаемых, которые не аннулируются образующей Шевалле x_2 — это слагаемое с $i = 3$ и последнее слагаемое (находящееся вне знака суммы). Они переходят (соответственно) в векторы

$$e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_3^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \wedge e_3^*$$

и

$$-\frac{l-1}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_3^*,$$

сумма которых равна нулю. Наконец, если образующую Шевалле x_1 применить к вектору v, получим вектор

$$\sum_{i=3}^{l+1} (e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^* - e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^*) + \frac{l-1}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes (e_1 \otimes e_2^* - e_1 \otimes e_2^*) = 0.$$

Вектор v имеет вес $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varpi_2$, и он является старшим в подпредставлении $V(\varpi_2) \subset V^* \otimes R(\mathfrak{l})$. Обозначим $w = (\mathrm{id}_{V^*} \otimes \rho)(v)$. Тогда тензор w определяет линейное отображение из пространства V^* в пространство $V^* \otimes V^*$, и $w \in S^2(V^*) \otimes V$ тогда и только тогда, когда образ этого отображения содержится в подпространстве $S^2(V^*) \subset V^* \otimes V^*$. Но отображение, определённое тензором w, переводит вектор $e_l \wedge e_{l+1}$ в тензор $e_1 \wedge e_l \otimes e_2 \wedge e_{l+1} + e_1 \wedge e_{l+1} \otimes e_2 \wedge e_l - e_2 \wedge e_l \otimes e_1 \wedge e_{l+1} - e_2 \wedge e_{l+1} \otimes e_1 \wedge e_l + (l-3)e_1 \wedge e_2 \otimes e_l \wedge e_{l+1} \notin S^2(V^*)$. (И снова, этот тензор лежит в $\Lambda^2(V^*)$ при $l = 3$.)

4.4.1.3. $\lambda = \varpi_p$, где $2 < p \leq \lceil l/2 \rceil$. Поскольку $2 < \lceil l/2 \rceil$, то $l \geq 5$. В этом случае ненулевых умножений также не существует. Воспользуемся леммой 4.25, чтобы проверить это. Множество весов $\mathfrak{X}(V)$ состоит из всевозможных сумм $\varepsilon_{k_1} + \ldots + \varepsilon_{k_p}$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq l+1$. Известно, что $\lambda^* = \varpi_{l+1-p} = -\varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1}$, и из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_{l+1-p} + \varpi_l) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{l-p}) \oplus V(\varpi_{l+2-p} + \varpi_l) \oplus V(\varpi_{l+1-p})$. Все эти веса различны, и в лемме 4.25 имеется четыре возможности для вектора $\lambda^* + \gamma$. Рассмотрим четыре случая.

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{l+1-p} + \varpi_l$, тогда $\gamma = \varpi_1 + \varpi_l = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1}$, и можно взять $\nu = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p + \varepsilon_{l+1}$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1} \notin \Psi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_{l+2-p} + \varpi_l$, тогда $\gamma = \varpi_{l+2-p} - \varpi_{l+1-p} + \varpi_l = \varepsilon_{l+2-p} - \varepsilon_{l+1}$. Пусть $\nu = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1}$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+2-p}$. Поскольку $2p \leq l+1 < l+3$, то $p-1 < l+2-p$, и $\nu+\gamma \in \mathfrak{X}(V)$. С другой стороны, $\nu+\gamma+\lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+2-p} - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{l+3-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1}$, и этот вектор не является корнем, поскольку $p > 2$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{l-p}$, $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{l-p} - \varpi_{l+1-p} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1-p}$. В этом случае пусть $\nu = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1-p} + \varepsilon_{l+1}$, этот вектор является весом, поскольку $2p - 1 < l + 1$. Получим $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_l \notin \Psi^+$, поскольку $p > 2$.

4. $\lambda^* + \gamma = \varpi_{l+1-p}$, тогда $\gamma = 0 \notin \Phi^+$, а лемма 4.25 требует, чтобы вектор γ был положительным корнем.

4.4.2. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа B_l и D_l

Система корней $\Psi^\vee$, двойственная к системе Ψ типа B_l, имеет тип C_l. Корни из системы $\Psi^\vee$, соответствующие простым корням из системы Ψ, образуют множество простых корней, причём, если их перечислять в том же порядке, что и простые корни системы Ψ, то нумерация получится стандартной для системы типа C_l. Обозначим корень системы $\Psi^\vee$, соответствующий корню $\beta_i \in \Psi$, за δ_i. Тогда максимальный короткий корень системы $\Psi^\vee$ равен $\delta_1+2(\delta_2+\ldots+\delta_{l-1})+\delta_l$, см. [14, §12.2, Table 2]. Из предложения 4.21 следует, что достаточно рассмотреть представления алгебры $\mathfrak{l}$ со старшими весами ϖ_1 и ϖ_l. Алгебры Ли типа B_2 и C_2 изоморфны, и изоморфизм между ними отождествляет неприводимые представления алгебры Ли типа B_2 со старшими весами ϖ_1 и ϖ_2 с неприводимыми представлениями алгебры Ли типа C_2 со старшими весами ϖ_2 и ϖ_1, соответственно. Мы рассмотрим представление алгебры Ли типа B_2 со старшим весом ϖ_2 позже, как представление алгебры Ли типа C_2 со старшим весом ϖ_1.

Система корней D_l $(l \geq 4)$ двойственна сама себе и состоит из корней одинаковой длины, максимальный корень выражается через простые как $\beta_1+2(\beta_2+\ldots+\beta_{l-2})+\beta_{l-1}+\beta_l$, см. [14, §12.2, Table 2]. По предложению 4.21 нужно рассматривать неприводимые представления со старшими весами ϖ_1, ϖ_{l-1} и ϖ_l. Но представления $V(\varpi_{l-1})$ и $V(\varpi_l)$ сопряжены внешним автоморфизмом, поэтому достаточно рассмотреть только одно из этих двух представлений. Мы будем рассматривать представление $V(\varpi_l)$.

Для рассмотрения представлений алгебр обоих типов (B_l и D_l) со старшим весом ϖ_l нам потребуется явный вид систем корней и весов. Рассмотрим l-мерное евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$. Под координатами векторов этого пространства, если не указано иное, всегда будут пониматься координаты в этом базисе. Система корней типа D_l состоит из векторов вида $\varepsilon_i+\varepsilon_j, \varepsilon_i-\varepsilon_j, -\varepsilon_i-\varepsilon_j$, где $i \neq j$, а множество её положительных корней состоит из векторов $\varepsilon_i+\varepsilon_j, \varepsilon_i-\varepsilon_j$, где $i<j$. Система корней B_l состоит

из всех корней системы D_l и ещё векторов $\pm\varepsilon_i$, множество её положительных корней состоит из всех положительных корней системы D_l и ещё векторов ε_i. Фундаментальные веса ϖ_1, ϖ_2 и ϖ_l в обоих случаях выражаются так: $\varpi_1 = \varepsilon_1$, $\varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $\varpi_l = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)/2$. В обоих случаях старший вес присоединённого представления равен ϖ_2.

4.4.2.1. $\lambda = \varpi_1$, $l \geq 2$ для алгебры типа B_l. Представление со старшим весом ϖ_1 построим следующим образом. Пусть V — линейное пространство размерности $2l+1$ в случае B_l и размерности $2l$ в случае D_l, ω — билинейная невырожденная симметрическая форма на пространстве V. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{l}$ в любом случае действует на пространстве V операторами, кососимметричными относительно формы ω, и подалгебра $\rho(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ состоит из всех операторов $V \to V$, кососимметричных относительно формы ω.

Докажем, что нетривиальных умножений не существует. Допустим, что на пространстве V имеется нетривиальное умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, и пусть c — трилинейная форма, двойственная к этому умножению. Другими словами, $c(u, v, w) = \omega(uv, w)$ для всех векторов $u, v, w \in V$.

Для любого вектора $u \in V$ оператор μ_u кососимметричен. Поэтому $c(u, v, w) = \omega(uv, w) = \omega(\mu_u v, w) = -\omega(v, \mu_u w) = -\omega(v, uw) = -\omega(uw, v) = -c(u, w, v)$. Поскольку умножение коммутативно, то $c(u, v, w) = \omega(uv, w) = \omega(vu, w) = c(v, u, w)$. Следовательно, $c(u, v, w) = -c(u, w, v) = -c(w, u, v) = c(w, v, u) = c(v, w, u) = -c(v, u, w) = -c(u, v, w)$, поэтому $c(u, v, w) = 0$, и $c = 0$.

4.4.2.2. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа B_l, $\lambda = \varpi_l$. В этом случае ненулевых умножений нет, докажем это, используя лемму 4.25. Группа Вейля порождена всеми перестановками базисных векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ и всеми отражениями, переводящими вектор ε_i в вектор $-\varepsilon_i$ и оставляющими все остальные базисные вектора на месте. Орбита вектора ϖ_l под действием этой группы состоит из всех векторов, у которых все координаты равны $\pm 1/2$. Поскольку $\dim V(\varpi_l) = 2^l$ (см. [4, таблица 5]), то эти веса — это все веса представления $V(\varpi_l)$. Схема Дынкина B_l не имеет нетривиальных автоморфизмов, и $\lambda^* = \lambda$. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_2 + \varpi_l) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_l) \oplus V(\varpi_l)$. Рассмотрим три случая.

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_2 + \varpi_l$, $\gamma = \varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Можно взять $\nu = (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_l)/2$, тогда $\nu + \gamma = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)/2 \in \mathfrak{X}(V)$ а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l \notin \Psi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_l$, $\gamma = \varpi_1 = \varepsilon_1$. В этом случае пусть $\nu = (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_l)/2$, тогда $\nu + \gamma = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)/2 \in \mathfrak{X}(V)$ а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l \notin \Psi^+$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_l$, тогда $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.2.3. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа D_l, $\lambda = \varpi_l$, $l \geq 4$. В этом случае ненулевых умножений также нет, докажем это, используя лемму 4.25. Если $l = 4$, то представления со старшими весами ϖ_l и ϖ_1 сопряжены внешним автоморфизмом, поэтому достаточно рассмотреть только случай $l \geq 5$. В этом случае группа Вейля порождена всеми перестановками базисных векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ и всеми отражениями, которые переводят вектор ε_i в вектор $-\varepsilon_i$, вектор ε_j в вектор $-\varepsilon_j$ и оставляют все остальные базисные вектора на месте. Орбита вектора ϖ_l под действием этой группы состоит из всех векторов, у которых все координаты равны $\pm 1/2$, причём число координат, равных $-1/2$, чётно. В этом случае $\dim V(\varpi_l) = 2^{l-1}$, поэтому снова эти веса — это все веса представления $V(\varpi_l)$. В частности, младший вес равен $(-\varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_l)/2 = -\varpi_l$, если l чётно, и $(-\varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l)/2$, если l нечётно. Прямым вычислением проверяется, что $(-\varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l)/2 = -\varpi_{l-1}$ (независимо от чётности l). Следовательно, $\lambda^* = \varpi_l$, если l чётно, и $\lambda^* = \varpi_{l-1}$, если l нечётно. Рассмотрим следующий вектор ζ: $\zeta = \varpi_l$, если l нечётно, и $\zeta = \varpi_{l-1}$, если l чётно. Другими словами, $\lambda^* \neq \zeta$ и $\{\lambda^*, \zeta\} = \{\varpi_{l-1}, \varpi_l\}$. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_2 + \lambda^*) \oplus V(\varpi_1 + \zeta) \oplus V(\lambda^*)$. Снова имеем три случая для веса $\lambda^* + \gamma$:

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_2 + \lambda^*$, $\gamma = \varpi_2$. Пусть $\nu = (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_l)/2$, тогда $\nu + \gamma = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)/2 \in \mathfrak{X}(V)$. Если l чётно, то $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l$, а если l нечётно, то $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{l-1}$. В обоих случаях, этот вектор не

является положительным корнем.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \zeta$, $\gamma = \varpi_1 + \zeta - \lambda^*$. Заметим, что $\zeta - \lambda^* = -(-1)^l \varepsilon_l$, поэтому $\gamma = \varpi_1 - (-1)^l \varepsilon_l$. Пусть $\nu = (-\varepsilon_1 - (-1)^l \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{l-1} + (-1)^l \varepsilon_l)/2$, тогда $\nu + \gamma = (\varepsilon_1 - (-1)^l \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{l-1} - (-1)^l \varepsilon_l)/2 \in \mathfrak{X}(V)$. Если l чётно, то $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{l-1} \notin \Psi^+$, поскольку $l > 4$. Если l нечётно, то $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-1} \notin \Psi^+$.

3. Если $\lambda^* + \gamma = \varpi_l$, то $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.3. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа C_l $(l \geq 2)$

Пусть E — евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$. Тогда векторы $\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i \neq j$, и $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq l)$ образуют систему корней типа C_l. Векторы $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(1 \leq i < j \leq l)$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(1 \leq i, j \leq l)$ образуют множество положительных корней Ψ^+. Соответствующие фундаментальные веса можно записать следующим образом: $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$.

Система корней $\Psi^\vee$, двойственная к системе корней Ψ, имеет тип B_l. Корни из системы $\Psi^\vee$, соответствующие простым корням из системы Ψ, образуют множество простых корней, и, как и в предыдущем случае, если их перечислять в том же порядке, что и простые корни системы Ψ, то нумерация получится стандартной для системы типа B_l. Снова обозначим корни в системе $\Psi^\vee$, соответствующие корням $\beta_1, \ldots, \beta_l \in \Psi$, за $\delta_1, \ldots, \delta_l$. Максимальный короткий корень системы $\Psi^\vee$ равен $\delta_1 + \ldots + \delta_l$, поэтому нужно рассмотреть все фундаментальные представления. При этом можно не рассматривать случай $l = 2$, $\lambda = \varpi_2$, поскольку он уже был рассмотрен нами как случай алгебры $\mathfrak{l}$ типа B_2 и её первого фундаментального представления.

4.4.3.1. $\lambda = \varpi_1$, $l \geq 2$. В этом случае оказывается, что ненулевые умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, существуют.

Пусть V — векторное пространство размерности $2l$. Выберем в нём базис $e_1, \ldots, e_l, e_{-1}, \ldots, e_{-l}$ и определим кососимметрическую форму ω следующим образом: $\omega = \sum(e_i^* \otimes e_{-i}^* - e_{-i}^* \otimes e_i^*)$. Тогда алгебру $\mathfrak{l}$ можно отождествить с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}(V)$, состоящей из всех операторов $V \to V$, кососимметричных относительно формы ω. При этом пространство V становится первым фундаментальным представлением алгебры $\mathfrak{l}$. Все верхнетреугольные (соотв. диагональные, строго верхнетреугольные) матрицы в алгебре $\mathfrak{sp}(V)$ образуют максимальную разрешимую (соотв. картановскую, максимальную унипотентную) подалгебру. При этих отождествлениях образующие Шевалле можно выбрать следующим образом: $x_i = e_i \otimes e_{i+1}^* - e_{-(i+1)} \otimes e_{-i}^*$, $y_i = e_{i+1} \otimes e_i^* - e_{-i} \otimes e_{-(i+1)}^*$, $h_i = e_i \otimes e_i^* - e_{i+1} \otimes e_{i+1}^* - e_{-i} \otimes e_{-i}^* + e_{-(i+1)} \otimes e_{-(i+1)}^*$. В частности, все образующие x_i порождают унипотентную подалгебру, состоящую из всех строго верхнетреугольных матриц в $\mathfrak{sp}(V)$.

Форма ω невырождена, поэтому любое умножение однозначно определяется трилинейной формой, двойственной к нему. Переформулируем условия, которые мы накладываем на умножение, в терминах трилинейной формы.

Пусть c — трилинейная форма, двойственная к некоторому умножению на пространстве V (мы не предполагаем изначально, что это умножение коммутативно или ассоциативно). Коммутативность умножения эквивалентна равенству $\omega(uv, w) = \omega(vu, w)$ для всех векторов $u, v, w \in V$, поскольку форма ω невырождена. В терминах формы c это означает, что $c(u, v, w) = c(v, u, w)$. Оператор μ_u действует как элемент алгебры $\mathfrak{l}$, если он кососимметричен относительно формы ω, т. е. $\omega(\mu_u v, w) = -\omega(v, \mu_u w)$. Другими словами (пользуясь кососимметричностью формы ω), это равенство можно записать как $\omega(uv, w) = \omega(uw, v)$. Для формы c это означает, что $c(u, v, w) = c(u, w, v)$. Следовательно, умножение коммутативно и все операторы умножения действуют как элементы алгебры $\mathfrak{l}$ тогда и только тогда, когда форма c симметрична по всем трём аргументам. Далее будем рассматривать только формы c, симметричные по всем трём аргументам.

Если умножение коммутативно и ассоциативно и все операторы умножения кососимметричны, то для любых векторов $u, v, w, z \in V$ выполнено

$\omega(u(vw),z) = -\omega(vw,uz) = -\omega(wv,uz) = \omega(v,w(uz)) = \omega(v,(wu)z) = -\omega((wu)v,z) = -\omega(uvw,z)$, следовательно, $uvw = 0$ для любых векторов $u,v,w \in V$. И наоборот, если умножение коммутативно и любое произведение вида $u(vw)$ равно нулю, то любое произведение вида $(uv)w$ равно $w(uv) = 0$, и умножение ассоциативно. Мы также видим, что нильпотентность операторов умножения в этом случае следует из остальных трёх условий, требуемых в определении умножения, согласованного с действием алгебры.

Пусть на пространстве V задано умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Обозначим за X линейную оболочку всех произведений вида uv, где $u,v \in V$. Как мы уже знаем, $uvw = 0$ для любых векторов $u,v,w \in V$, поэтому для любых векторов $u,v,w,z \in V$ выполнено $\omega(uv,wz) = -\omega(uvw,z) = 0$, и пространство X изотропно. Обозначим ω-ортогональное дополнение к пространству X за Y. Если $u \in Y$ и $v,w \in V$, то $vw \in X$, и $\omega(uv,w) = \omega(vu,w) = -\omega(u,vw) = 0$, следовательно, $uv = 0$ для любых векторов $u \in Y$, $v \in V$. Другими словами, $\mu_u = 0$ при $u \in Y$. Получаем следующее условие на форму c: если $u \in Y$, $v,w \in V$, то $c(u,v,w) = \omega(uv,w) = 0$. Следовательно, $c(Y,V,V) = 0$.

Теперь пусть c — симметричная по всем аргументам трилинейная форма на пространстве V, и пусть $Y' \subseteq V$ — такое коизотропное подпространство, что $c(Y',V,V) = 0$. (Мы не предполагаем изначально, что умножение, к которому эта форма двойственна, ассоциативно, но мы уже знаем, что поскольку форма c симметрична, что умножение, к которому она является двойственной, коммутативно и операторы умножения кососимметричны.) Тогда для любых векторов $u \in Y'$, $v,w \in V$ имеем $\omega(uv,w) = c(u,v,w) = 0$, поэтому $\mu_u = 0$. Обозначим за X' ω-ортогональное дополнение к пространству Y'. Поскольку форма c симметрична, то $c(V,V,Y') = 0$, поэтому, если $u,v \in V$ и $w \in Y'$, то $\omega(uv,w) = c(u,v,w) = 0$, поэтому $\omega(uv,Y') = 0$ и $uv \in X'$. Подпространство Y' коизотропно, поэтому $\omega(X',X') = 0$. Теперь из кососимметричности всех операторов умножения следует, что $\omega(u(vw),z) = -\omega(vw,uz) = 0$, поэтому $u(vw) = 0$, и умножение ассоциативно.

Итак, трилинейные формы, двойственные к умножениям, согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$ — это в точности трилинейные симметричные по всем перестановкам индексов формы c, для которых существует такое коизотропное пространство $Y \subseteq V$, что $c(Y, V, V) = 0$. Наконец, любое коизотропное подпространство в пространстве V содержит лагранжево подпространство, и любое лагранжево подпространство коизотропно, поэтому в последнем условии коизотропное подпространство Y можно заменить на лагранжево подпространство.

4.4.3.2. $\lambda = \varpi_p$**,** $l \geq 3$**,** $p \geq 2$**.** Схема Дынкина C_l не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda$. Группа Вейля порождена всеми перестановками базисных векторов ε_i и всеми отражениями, которые переводят вектор ε_i в вектор $-\varepsilon_i$ и оставляют все остальные базисные вектора на месте. Следовательно, множество весов $\mathfrak{X}(V)$ как минимум содержит все линейные комбинации любых наборов из p из базисных векторов ε_i с коэффициентами ± 1. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(2\varpi_1 + \varpi_p) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{p-1}) \oplus V(\varpi_p) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{p+1})$, где последнее слагаемое имеется только если $p < l$. Все неприводимые слагаемые различны, рассмотрим четыре случая.

1. $\lambda^* + \gamma = 2\varpi_1 + \varpi_p$, тогда $\gamma = 2\varpi_1 = 2\varepsilon_1$. Можно взять $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$, и тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = 2(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p) \notin \Psi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{p-1}$, $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{p-1} - \varpi_p = \varepsilon_1 - \varepsilon_p$. Случаи $p > 2$ и $p = 2$ нужно рассмотреть отдельно. Если $p > 2$, то пусть $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$. В этом случае получим $\nu + \gamma = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1}) + \varepsilon_p \notin \Psi^+$. Если $p = 2$, то по нашему предположению $l \geq 3$, и можно взять $\nu = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Получим $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \notin \Psi^+$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{p+1}$. Этот случай возможен, только если $p < l$. Тогда $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{p+1} - \varpi_p = \varepsilon_1 + \varepsilon_{p+1}$. Пусть $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p+1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p) + \varepsilon_{p+1} \notin \Psi^+$.

4. $\lambda^* + \gamma = \varpi_p$, тогда $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.4. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_6

Система корней типа E_6 двойственна сама себе, и максимальный корень равен $\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+2\beta_5+\beta_6$ (см. [14, §12.2, Table 2]), где $\beta_1,\ldots,\beta_6$ — простые корни. Достаточно рассмотреть представление $V(\varpi_1)$, поскольку представление $V(\varpi_6)$ сопряжено с ним при помощи внешнего автоморфизма.

Для построения системы корней и весов алгебры $\mathfrak{l}$ воспользуемся методом моделей, возникающих из градуировок, см. [3, глава 5, §2]. Расширенная система простых корней алгебры $\mathfrak{l}$ состоит из корней $\beta_1,\ldots,\beta_6$ и минимального (отрицательного) корня $\beta'=-\beta_1-2\beta_2-2\beta_3-3\beta_4-2\beta_5-\beta_6$, который ортогонален всем простым корням β_i, кроме корня β_2. Построим $\mathbb{Z}_2$-градуировку алгебры $\mathfrak{l}$, соответствующую внутреннему автоморфизму и имеющую отметку 1 при корне β_2 и отметку 0 при всех остальных простых корнях и при минимальном корне (см. [3, глава 3, §3.7]). Нулевая градуированная компонента изоморфна (как алгебра Ли) алгебре $\mathfrak{sl}_6\oplus\mathfrak{sl}_2$. Конструкция, определяющая градуировку, также определяет подалгебру Картана, систему корней и множество простых корней для нулевой градуированной компоненты. В этом случае простые корни алгебры $\mathfrak{sl}_6$ — это $\beta_1,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$, а простой корень алгебры $\mathfrak{sl}_2$ — это β'. Первая градуированная компонента является неприводимым представлением нулевой, и её младший вес равен β_2. Следовательно, первая градуированная компонента как представление алгебры $\mathfrak{sl}_6\oplus\mathfrak{sl}_2$ равна $V_{\mathfrak{sl}_6}(\varpi_3)\otimes V_{\mathfrak{sl}_2}(\varpi_1)=\Lambda^3(\mathbb{C}^6)\otimes\mathbb{C}^2$.

Теперь мы можем описать систему корней E_6. Рассмотрим евклидово пространство E с ортонормированным базисом $\widetilde{\varepsilon_1},\ldots,\widetilde{\varepsilon_6}$ и его подпространство $E'=\langle\widetilde{\varepsilon_1}+\ldots+\widetilde{\varepsilon_6}\rangle^{\perp}$. Обозначим ортогональную проекцию $E\to E'$ за q. Обозначим $\varepsilon_i=q(\widetilde{\varepsilon_i}/\sqrt{2})$, тогда $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_6=0$, $(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=5/12$, и $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-1/12$ при $i\neq j$. Рассмотрим также одномерное евклидово пространство с ортонормированным базисом ζ_1. Система корней E_6 тогда реализуется как множество векторов в пространстве $E'\oplus\langle\zeta_1\rangle$: вида $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ $(i\neq j)$, $\pm\zeta_1$ и $-\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k\pm\zeta_1/2$, где i,j,k различны. Легко видеть, что длина каждого из этих векторов равна 1.

Здесь $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta_i = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$ при $i = 3, 4, 5, 6$, $\beta' = \zeta_1$, и $\beta_2 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \zeta_1/2$ (это младший вес представления $\Lambda^3(\mathbb{C}^6) \otimes \mathbb{C}^2$).

Чтобы описать множество весов $\mathfrak{X}(V_{\mathfrak{l}}(\varpi_1))$, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ типа E_7. Зафиксируем картановскую подалгебру и соответствующую ей систему корней алгебры $\mathfrak{h}$. Эта система корней содержит подсистему корней типа E_6, поэтому алгебру $\mathfrak{l}$ можно вложить в алгебру $\mathfrak{h}$, так чтобы выбранные картановские подалгебры, выбранные борелевские подалгебры и выбранные системы корней также вкладывались бы друг в друга. Тогда простые корни при этом вложении переходят в простые корни. Не ограничивая общности, можно считать, что это вложение сохраняет скалярное произведение на картановской подалгебре. Поэтому можно использовать одни и те же обозначения для простых корней системы типа E_7 и для простых корней системы типа E_6, т. е. простые корни системы типа E_7 можно обозначать за β_i $(1 \le i \le 7)$, и выбранные выше простые корни системы типа E_6 будут в точности корнями $\beta_1, \ldots, \beta_6$. Обозначим параболическую подалгебру алгебры $\mathfrak{h}$, соответствующую корню β_7, за $\mathfrak{q}$. Полупростая часть стандартной подалгебры Леви алгебры $\mathfrak{q}$ в точности равна $\mathfrak{l}$. Обозначим унипотентный радикал алгебры $\mathfrak{q}$ за $\mathfrak{w}$.

Максимальный корень системы типа E_7 равен $\beta = 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$. Скалярное произведение корня β и любого простого корня системы типа E_7, кроме корня β_1, равно нулю, а $(\beta, \beta_1) = 1/2$ (напомним, что изначально мы строили систему типа E_6 так, чтобы все корни имели длину 1). В системе E_6 имеется 36 положительных корней, а в системе E_7 их 63, поэтому $\dim \mathfrak{w} = 27$. Но $\dim V = 27$ (см. [4, таблица 5]), поэтому подалгебра $\mathfrak{w}$ как представление алгебры $\mathfrak{l}$ изоморфна представлению V. Следовательно, числовые отметки весов представления V на корнях алгебры $\mathfrak{l}$ можно вычислять как удвоенные скалярные произведения корней системы E_7, соответствующих этим весам (их разложения в линейную комбинацию простых корней системы E_7 содержат корень β_7 с коэффициентом 1), и корней системы E_6, рассматриваемых как корни объемлющей системы E_7.

Вложение $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{l}$ позволяет рассмотреть подалгебру $\mathfrak{w}$ как представление алгебры $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Разложим это представление в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$-представлений. Система корней типа E_7 содержит подсистему типа A_6, порождённую корнями $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$. Следовательно, вектор $\delta_1 = \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7$ является корнем системы E_7. Имеем $(\beta_i, \delta_1) \geq 0$ при $i \neq 2$, поэтому $(\beta_i + \delta_1, \beta_i + \delta_1) > 1$ при $i \neq 2$, и вектор $\beta_i + \delta_1$ не может быть корнем системы E_7 при $i \neq 2$. Также, если к корню δ_1 прибавить корень β', то получится линейная комбинация корней β_i, в которой некоторые коэффициенты положительные, а некоторые отрицательные, поэтому эта сумма не может быть корнем системы E_7. Следовательно, $\mathfrak{h}_{\delta_1}$ — подпространство старшего веса в некотором $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$-подпредставлении представления $\mathfrak{w}$. Единственная ненулевая числовая отметка корня δ_1 на выбранных простых корнях системы $\mathfrak{sl}_6$ — это отметка на корне β_1, и она равна 1. Числовая отметка корня δ_1 на корне β' также равна 1, поэтому это неприводимое подпредставление изоморфно $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^2$.

Система корней типа E_7 также содержит подсистему типа A_4, порождённую корнями $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_2$, поэтому вектор $\beta'' = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ является корнем системы E_7. Отражение, определённое корнем β, переводит корень β'' в вектор $\beta - \beta'' = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$, который следовательно также является корнем системы E_7. Обозначим его за δ_2. Снова, если $i \neq 2$, то $(\beta_i, \delta_2) > 0$, $(\beta_i + \delta_2, \beta_i + \delta_2) > 1$, и вектор $\beta_i + \delta_2$ не является корнем системы E_7. И снова вектор $\beta' + \delta_2$ может быть записан как линейная комбинация корней β_i, в которой некоторые коэффициенты положительные, а некоторые отрицательные, поэтому вектор $\beta' + \delta_2$ не является корнем системы E_7. Поэтому подпространство $\mathfrak{h}_{\delta_2}$ также является подпространством старшего веса для некоторого неприводимого $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$-подпредставления представления $\mathfrak{w}$. Единственная ненулевая числовая отметка корня δ_2 на выбранных простых корнях системы $\mathfrak{sl}_6$ — это отметка на корне β_5, и она равна 1. Числовая отметка корня δ_2 на корне β' равна нулю, поэтому это неприводимое подпредставление изоморфно представлению $\Lambda^2(\mathbb{C}^6)^*$, и алгебра $\mathfrak{sl}_2$ действует на нём тривиально. Следовательно, веса представления

V равны $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(1 \le i < j \le 6)$ и $\varepsilon_i \pm \zeta_1/2$ $(1 \le i \le 6)$.

Старший вес представления V как представления алгебры $\mathfrak{l}$ равен $\lambda = \varpi_1 = \varepsilon_1 - \zeta_1/2$. Младший вес равен $\varepsilon_6 + \zeta_1/2$, поскольку ни для какого корня β_i вектор $\varepsilon_6 + \zeta_1/2 - \beta_i$ не является весом представления V. Поэтому $\lambda^* = -\varepsilon_6 - \zeta_1/2$. Вычисление скалярных произведений показывает, что $\lambda^* = \varpi_6$.

Теперь всё готово для того, чтобы применить лемму 4.25. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_2 + \varpi_6) + V(\varpi_3) + V(\varpi_6)$. Рассмотрим три случая.

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_2 + \varpi_6$, $\gamma = \varpi_2$. Прямое вычисление показывает, что $\varpi_2 = -\zeta_1$. Можно взять $\nu = \varepsilon_1 + \zeta_1/2$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 - \zeta_1/2 \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \zeta_1 \notin \Psi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_3$, и снова прямое вычисление скалярных произведений показывает, что $\varpi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \zeta_1$. Поэтому $\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_6 - \zeta_1/2$, и можно взять $\nu = -\varepsilon_2 - \varepsilon_6$. Тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 - \zeta_1/2 \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \zeta_1 \notin \Psi^+$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_6$, тогда $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.5. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_7

Система корней типа E_7 также двойственна сама себе, и максимальный корень равен $2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$ (см. [14, §12.2, Table 2]). Нужно рассмотреть представление $V = V(\varpi_7)$. Не ограничивая общности, будем считать, что длина каждого корня равна 1. Снова воспользуемся методом моделей, возникающих из градуировок, для построения системы корней типа E_7. Обозначим наименьший корень системы E_7 за β'. Имеем $(\beta', \beta_i) = 0$ при $i \ne 1$, $(\beta', \beta_1) = -1/2$. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуировку, соответствующую внутреннему автоморфизму и отметке 1 при корне β_2 и отметкам 0 при всех остальных простых корнях и при корне β'. Нулевая градуированная компонента изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_8$, и её простые корни, возникающие из градуировки, такие: $\beta', \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$. Первая градуированная компонента как представление нулевой изоморфна $\Lambda^4(\mathbb{C}^8)$.

Для описания системы корней E_7 рассмотрим евклидово пространство E

с ортонормированным базисом $\widetilde{\varepsilon_1}, \ldots, \widetilde{\varepsilon_8}$ и его подпространство $E' = \langle \widetilde{\varepsilon_1} + \ldots + \widetilde{\varepsilon_8} \rangle^{\perp}$. Обозначим ортогональную проекцию $E \to E'$ за q. Обозначим $\varepsilon_i = q(\widetilde{\varepsilon_i}/\sqrt{2})$. Прямым вычислением проверяется, что $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 7/16$, $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -1/16$ при $i \neq j$ и $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_8 = 0$. Система корней типа E_7 состоит из всех векторов вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i \neq j$, и вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l$, где все четыре индекса различны. Для простых корней, использованных для построения градуировки, получаем следующие выражения: $\beta_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\beta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ при $3 \leq i \leq 7$, $\beta' = -2\beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 - 4\beta_4 - 3\beta_5 - 2\beta_6 - \beta_7 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, поэтому $\beta_2 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$. Прямым вычислением проверяется, что длина каждого из этих векторов равна 1.

Чтобы найти множество весов $\mathfrak{X}(V_{\mathfrak{l}}(\varpi_7))$, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ типа E_8. Её система корней содержит подсистему типа E_7, поэтому можно выбрать борелевскую подалгебру и картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{h}$ и отождествить алгебру $\mathfrak{l}$ с подалгеброй алгебры $\mathfrak{h}$, так чтобы выбранная борелевская (соотв. картановская) подалгебра алгебры $\mathfrak{l}$ вкладывалась в борелевскую (соотв. картановскую) подалгебру алгебры $\mathfrak{h}$. При этом вложении простые корни $\beta_1, \ldots, \beta_7$ алгебры $\mathfrak{l}$ переходят в простые корни $\beta_1, \ldots, \beta_7$ алгебры $\mathfrak{h}$, поэтому для них можно использовать одно и то же обозначение (и обозначить оставшийся простой корень алгебры $\mathfrak{h}$ за β_8). Максимальный корень системы E_8 равен $2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + 6\beta_4 + 5\beta_5 + 4\beta_6 + 3\beta_7 + 2\beta_8$, и отражение, определённое корнем β_8 переводит его в корень $\beta = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + 6\beta_4 + 5\beta_5 + 4\beta_6 + 3\beta_7 + \beta_8$. Всего в системе E_8 имеется 120 положительных корней. 63 из них принадлежат системе E_7, и их разложения в линейные комбинации корней $\beta_1, \ldots, \beta_8$ на самом деле не содержат корня β_8. Мы уже знаем один корень системы E_8, разложение которого в линейную комбинацию простых корней содержит корень β_8 с коэффициентом 2, а именно старший корень. Следовательно, в системе E_8 имеется самое большее 56 корней, разложения которых в линейные комбинации простых корней содержат корень β_8 с коэффициентом 1. Обозначим прямую сумму соответствующих корневых подпространств в алгебре $\mathfrak{h}$ за W. Ясно, что подалгебра $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$ сохраняет подпространство W. Прямое вычисление показывает, что $(\beta_i, \beta) = 0$ при $1 \le i \le 6$, и $(\beta_7, \beta) = 1/2$. Поэтому вектор $\beta_i + \beta$ не является корнем при $1 \le i \le 7$, и подпространство $\mathfrak{h}_\beta$ является старшим весовым подпространством для действия алгебры $\mathfrak{l}$ в пространстве W. Из значений этих скалярных произведений также следует, что подпространство $\mathfrak{h}_\beta$ с точки зрения алгебры $\mathfrak{l}$ имеет вес ϖ_7. Но известно, что $\dim V = 56$, поэтому пространства V и W изоморфны как $\mathfrak{l}$-представления, и мы можем отождествить их.

Теперь разложим представление V в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_8$-представлений. Система корней типа E_8 содержит подсистему типа A_7, простые корни которой равны $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$. Следовательно, вектор $\delta_1 = \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8$ является корнем системы E_8. Он имеет неотрицательные скалярные произведения с простыми корнями β_i, где $i = 1$ или $3 \le i \le 8$, поэтому в этих случаях $(\beta_i + \delta_1, \beta_i + \delta_1) > 1$, и вектор $\beta_i + \delta_1$ не является корнем системы E_8. Разложение вектора $\beta' + \delta_1$ в линейную комбинацию простых корней содержит корень β_8 с коэффициентом 1 к корень β_2 с коэффициентом -2, поэтому вектор $\beta' + \delta_1$ также не является корнем системы E_8. Следовательно, $\mathfrak{h}_{\delta_1}$ — подпространство старшего веса в некотором $\mathfrak{sl}_8$-подпредставлении представления V. Корень δ_1 ортогонален всем простым корням алгебры $\mathfrak{sl}_8$, кроме корня β_1, и $(\delta_1, \beta_1) = 1/2$, поэтому это неприводимое подпредставление изоморфно $\Lambda^2(\mathbb{C}^8)$.

Выше мы видели, что вектор $\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$ является корнем системы E_7. Кроме того, вектор $\beta_6 + \beta_7 + \beta_8$ является корнем системы $A_7 \subset E_8$. При этом $(\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7, \beta_6 + \beta_7 + \beta_8) = -1/2$, поэтому отражение, определённое корнем $\beta_6 + \beta_7 + \beta_8$ переводит корень $\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$ в корень $\delta_2 = \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 3\beta_5 + 3\beta_6 + 2\beta_7 + \beta_8$. Теперь $(\delta_2, \beta_i) = 0$ при $i = 1, 3, 4, 5, 7, 8$, $(\delta_2, \beta_6) = 1/2$ и $(\delta_2, \beta') = 0$. Поэтому $(\delta_2 + \beta_i, \delta_2 + \beta_i) > 1$ при $i \ne 2$, $(\delta_2 + \beta', \delta_2 + \beta') > 1$, и векторы $\delta_2 + \beta_i$ при $i \ne 2$ и вектор $\delta_2 + \beta'$ не являются корнями системы E_8. Поэтому пространство $\mathfrak{h}_{\delta_2}$ является подпространством старшего веса для некоторого неприводимого $\mathfrak{sl}_8$-подпредставления представления V, и это подпредставление изоморфно

$\Lambda^2(\mathbb{C}^8)^*$. Наконец, $\dim \Lambda^2(\mathbb{C}^8) = \dim \Lambda^2(\mathbb{C}^8)^* = 28$, $\dim V = 56$, поэтому подпредставления $\Lambda^2(\mathbb{C}^8)$ и $\Lambda^2(\mathbb{C}^8)^*$ — это все неприводимые $\mathfrak{sl}_8$-подпредставления представления V. Следовательно, множество весов $\mathfrak{X}(V)$ состоит из всех векторов вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ и $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$.

Воспользуемся леммой 4.25 и докажем, что ненулевых умножений не существует. Схема Дынкина E_7 не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda = \varpi_7$. Из [4, таблица 5] мы видим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_7) \oplus V(\varpi_2) \oplus V(\varpi_7)$. Прямым вычислением скалярных произведений проверяется, что $\varpi_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\varpi_2 = -2\varepsilon_1$ и $\varpi_7 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_8$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \varpi_7$, $\gamma = \varpi_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Можно взять $\nu = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \notin \Psi^+$.

2. $\gamma + \lambda^* = \varpi_2$, тогда $\gamma = \varpi_2 - \varpi_7 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_8$. Пусть $\nu = -\varepsilon_7 - \varepsilon_8$, тогда $\nu + \gamma = -\varepsilon_1 - \varepsilon_7 \in \mathfrak{X}(V)$. С другой стороны, $\nu + \gamma + \lambda^* = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8 \notin \Psi^+$.

3. $\gamma + \lambda^* = \varpi_7$, тогда $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.6. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_8

Система корней E_8 двойственна сама себе, все корни в ней имеют одинаковую длину, и максимальный корень выражается через простые следующим образом: $2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + 6\beta_4 + 5\beta_5 + 4\beta_6 + 3\beta_7 + 2\beta_8$. Коэффициенты при всех простых корнях больше 1, поэтому по предложению 4.21 на любом $\mathfrak{l}$-модуле любое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, обязательно нулевое.

4.4.7. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа F_4

Система корней Ψ типа F_4 изоморфна двойственной системе $\Psi^\vee$, но различные корни системы Ψ имеют разную длину. Корни системы $\Psi^\vee$, соответствующие корням из (любого) множества простых корней, также образуют множество простых корней, но, чтобы сделать матрицы Картана для этих множеств простых корней одинаковыми, нужно корень, соответствующий первому (соотв.

второму, третьему, четвёртому) простому корню системы Ψ, назвать четвёртым (соотв. третьим, вторым, первым) корнем системы $\Psi^\vee$. Выберем простые корни $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ в системе Ψ, и обозначим соответствующие им корни в системе $\Psi^\vee$ за $\delta_4, \delta_3, \delta_2, \delta_1$, соответственно. Тогда корни $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ в этом порядке образуют множество простых корней системы $\Psi^\vee$ со стандартной матрицей Картана. В частности, максимальный короткий корень равен $\delta_1+2\delta_2+3\delta_3+2\delta_4$, и, поскольку корень $\delta_1 \in \Psi^\vee$ соответствует корню $\beta_4 \in \Psi$, то из предложения 4.21 следует, что достаточно рассмотреть представление $V = V(\lambda)$, где $\lambda = \varpi_4$.

Воспользуемся явной конструкцией для системы типа F_4, см. [14, §12]. Именно, рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$. Тогда систему корней образуют векторы $\pm\varepsilon_i$, $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $(i \neq j)$ и $(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$ (во всех случаях все знаки можно выбирать независимо). В качестве простых корней можно взять $\beta_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\beta_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\beta_3 = \varepsilon_4$, $\beta_4 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$. Прямая проверка показывает, что $\varpi_4 = \varepsilon_1$. Следовательно, множество весов $\mathfrak{X}(V)$ состоит из всех коротких корней и нуля. Ещё одно прямое вычисление показывает, что $\varpi_1 = \varepsilon_1+\varepsilon_2$ и $\varpi_3 = (3\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2$.

Ненулевых умножений не существует, будем доказывать это, используя лемму 4.25. Схема Дынкина F_4 не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda$. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1+\varpi_4) \oplus V(\varpi_3) \oplus V(\varpi_4)$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \varpi_4$, $\gamma = \varpi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. В этом случае пусть $\nu = -\varepsilon_2$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 \notin \Psi^+$.

2. $\gamma + \lambda^* = \varpi_3$, тогда $\gamma = \varpi_3 - \varpi_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$. Можно взять $\nu = 0$, получим $\nu + \gamma = \gamma = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = \varpi_3 = (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2 \notin \Psi^+$.

3. $\gamma + \lambda^* = \varpi_4$, тогда $\gamma = 0 \notin \Psi^+$.

4.4.8. Алгебра $\mathfrak{l}$ типа G_2

Использование предложения 4.21 в этом случае аналогично предыдущему случаю. Именно, если Ψ — система корней типа G_2, то двойственная система корней также имеет тип G_2, но если β_1 и β_2 — простые корни системы Ψ, то соответствующие им корни в системе $\Psi^\vee$ нужно обозначить δ_2 и δ_1, соответственно, и тогда корни δ_1 и δ_2 в этом порядке будут множеством простых корней в системе $\Psi^\vee$ с матрицей Картана, стандартной для системы типа G_2. Тогда максимальный короткий корень системы $\Psi^\vee$ будет равен $2\delta_1 + \delta_2$, и по предложению 4.21, нужно рассмотреть представление $V = V(\lambda)$, где $\lambda = \varpi_1$.

Известно, что система корней G_2 состоит из всех корней системы A_2 и попарных сумм корней системы A_2, угол между которыми равен $\pi/3$. Более явно, рассмотрим евклидово пространство E с ортонормированным базисом $\widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}, \widetilde{\varepsilon_3}$ и его подпространство $E' = \langle \widetilde{\varepsilon_1} + \widetilde{\varepsilon_2} + \widetilde{\varepsilon_3} \rangle^\perp$. Обозначим ортогональную проекцию $E \to E'$ за q, и пусть $\varepsilon_i = q(\widetilde{\varepsilon_i})$. Тогда все векторы $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ образуют систему корней типа A_2. Угол между векторами $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ равен $\pi/3$, и вектор $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$ является одним из корней системы G_2. Остальные корни могут быть получены действием группы Вейля системы A_2, они равны $\pm 3\varepsilon_i$. В качестве множества положительных корней можно выбрать корни $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i < j$, $3\varepsilon_1$, $3\varepsilon_2$, $-3\varepsilon_3$. Полученное множество простых корней состоит из корней $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и $\beta_2 = 3\varepsilon_2$. Фундаментальные веса выражаются следующим образом: $\varpi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, $\varpi_2 = -3\varepsilon_3$. Следовательно, множество весов $\mathfrak{X}(V(\varpi_1))$ состоит из всех коротких корней и нуля.

Снова воспользуемся леммой 4.25, чтобы доказать, что ненулевых умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует. Схема Дынкина G_2 не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda$. Из [4, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus V(2\varpi_1) \oplus V(\varpi_1)$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \varpi_2$, $\gamma = \varpi_2 = -3\varepsilon_3$. Пусть $\nu = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, тогда $\nu + \gamma = -2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\lambda^* \notin \Psi^+$.

2. $\gamma+\lambda^*=2\varpi_1$, $\gamma=\varpi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$. Пусть $\nu=0$, тогда $\nu+\gamma=\varepsilon_1-\varepsilon_3\in\mathfrak{X}(V)$, $\nu+\gamma+\lambda^*=2\lambda^*\notin\Psi^+$.

3. $\gamma+\lambda^*=\varpi_1$, тогда $\gamma=0\notin\Psi^+$.

Мы рассмотрели все возможные типы простых алгебр Ли, и доказательство теоремы 4.23 окончено. □

4.4.9. Классификация умножений с точностью до действия группы L

Теперь будем классифицировать умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, *с точностью до действия группы* L. (Напомним, что группа L действует на множестве умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, следующим образом. Если $l\in L$ и умножение $\mu\colon V\times V\to V$ согласовано с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то $(l\cdot\mu)(v,w)=l\mu(l^{-1}v,l^{-1}w)$ для любых векторов $v,w\in V$.) Начнём со следующего определения, которое понадобится нам в случае $L=SL_{l+1}$. Пусть V — коммутативная унипотентная алгебра размерности $l+1$ ($l\in\mathbb{N}$), такая что все операторы умножения нильпотентны. Обозначим тензор структурных констант умножения на пространстве V за $c\in V^*\otimes V^*\otimes V$. Группа $SL_{l+1}=SL(V)$ действует на пространстве V, поэтому она действует и на пространстве $V^*\otimes V^*\otimes V$. Для тензора c имеется ровно две возможности.

1. С помощью действия группы SL_{l+1} на пространстве $V^*\otimes V^*\otimes V$ тензор c можно умножить на произвольный ненулевой скаляр. В этом случае будем называть алгебру V *масштабируемой.*

2. С помощью действия группы SL_{l+1} тензор c можно умножить лишь на конечное число различных скаляров. В этом случае будем называть алгебру V *немасштабируемой.*

Отметим, что возможность умножить тензор структурных констант на произвольное ненулевое комплексное число зависит только от класса изоморфизма

$l+1$-мерной алгебры.

Приведём примеры масштабируемой и немасштабируемой алгебр.

Пример 4.26. Пример немасштабируемой коммутативной ассоциативной алгебры размерности 18 с нильпотентными операторами умножения.

Обозначим за V подалгебру (без единицы) в алгебре $\mathbb{C}[x,y]/(x^5+y^5-x^3y^3, x^4y, xy^4)$, порождённую мономами x и y. Эта алгебра имеет размерность 18, и в ней можно выбрать следующий базис: $x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^2y^3, x^3y^2, x^5, y^5$. Далее под степенью монома будем понимать его полную степень по переменным x и y. Заметим, что каждый моном степени не ниже 7 равен нулю в алгебре V. Действительно, такой моном обязательно делится на один из четырёх следующих мономов: x^4y, xy^4, x^7 или y^7. Первые два из этих мономов равны нулю по определению алгебры V, а для монома x^7 можно написать $x^7=-x^2y^5+x^5y^3=0$, поскольку $xy^4=x^4y=0$. Вычисления для монома y^7 аналогичны. Следовательно, все операторы умножения в алгебре V нильпотентны.

Группу автоморфизмов алгебры V можно понимать как подгруппу группы GL_{18}, сохраняющую тензор структурных констант умножения в алгебре V, в частности, её можно понимать как алгебраическую подгруппу группы GL_{18}. Рассмотрим автоморфизм ψ, лежащий в связной компоненте единицы группы автоморфизмов алгебры V. Любой автоморфизм алгебры V однозначно определяется образами порождающих x и y. Предположим, что $\psi(x) = ax+by+$(члены большей степени) и $\psi(y)=cx+dy+$(члены большей степени). При этом матрица

$$M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

должна быть невырождена, поскольку иначе образ $\psi(V)$ пересекал бы пространство $\langle x,y\rangle$ не более, чем по одномерному подпространству.

Тогда $\psi(x^5)=a^5x^5+10a^3b^2x^3y^2+10a^2b^3x^2y^3+b^5y^5+\alpha x^3y^3=(a^5+\alpha)x^5+$

$10a^3b^2x^3y^2 + 10a^2b^3x^2y^3 + (b^5+\alpha)y^5$, где α — некоторое комплексное число, $\psi(y^5) = c^5x^5 + 10c^3d^2x^3y^2 + 10c^2d^3x^2y^3 + d^5y^5 + \beta x^3y^3 = (c^5+\beta)x^5 + 10c^3d^2x^3y^2 + 10c^2d^3x^2y^3 + (c^5+\beta)y^5$, где $\beta \in \mathbb{C}$, $\psi(x^3y^3) = \gamma x^3y^3 = \gamma x^5 + \gamma y^5$, где $\gamma \in \mathbb{C}$. Сумма этих трёх многочленов (они уже разложены по выбранному базису алгебры V) должна быть равна нулю в алгебре V. Отсюда, в частности, следует, что $a^3b^2 = -c^3d^2$ и $a^2b^3 = -c^2d^3$. Допустим сначала, что среди чисел a, b, c, d нет нулей. Тогда $(a^3b^2)/(a^2b^3) = (-c^3b^2)/(-c^2d^3)$, $a/b = c/d$, откуда $ad = bc$, и матрица M вырождена. Следовательно, хотя бы одно из чисел a, b, c, d равно нулю. Но если $c = 0$ или $d = 0$, то $a^3b^2 = 0$, поэтому $a = 0$ или $b = 0$. Следовательно, в любом случае хотя бы одно из чисел a, b равно нулю. Но тогда $-c^2d^3 = 0$, поэтому хотя бы одно из чисел c, d также равно нулю. Если $a = 0$ и $c = 0$, то матрица M вырождена, и если $b = 0$ и $d = 0$, то матрица M тоже вырождена. Остаются только возможности $a = d = 0$ или $b = c = 0$.

Множество автоморфизмов, для которых $a = d = 0$, и множество автоморфизмов, для которых $b = c = 0$ — это два замкнутых непересекающихся множества, поэтому связная компонента единицы является подмножеством только одного из них. Для тождественного автоморфизма имеем $b = c = 0$, поэтому эти уравнения также выполнены для всех автоморфизмов из связной компоненты единицы. Заметим, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$ из невырожденности матрицы M.

Теперь образы мономов x и y можно записать как $\psi(x) = ax + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 +$ (члены большей степени) и $\psi(y) = dy + d_1y^2 + d_2xy + d_3x^2 +$ (члены большей степени). Напомним, что любой моном степени не меньше 7 равен нулю в алгебре V. Поэтому образ монома x^5 (соотв. y^5) не зависит от членов степени 3 и выше в образе монома x (соотв. y). Поэтому $\psi(x^5) = a^5x^5 + 5a^4x^4(a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2) = a^5x^5 + 5a^4a_1x^6 = a^5x^5 + 5a^4a_1(-xy^5 + x^4y^3) = a^5x^5$. Аналогично, $\psi(y^5) = d^5y^5$. Наконец, $\psi(x^3y^3) = a^3d^3x^3y^3 = a^3d^3x^5 + a^3d^3y^5$ (все остальные члены имеют степень не ниже 7). Следовательно, $a^5x^5 + d^5y^5 - a^3d^3x^5 - a^3d^3y^5 = 0$. Мономы x^5 и y^5 принадлежат выбранному базису алгебры V, поэтому $a^5 = a^3d^3 = d^5$, откуда $a^2 = d^3$, $a^3 = d^2$, и $a^2/a^3 = d^3/d^2$. Другими словами, $a^{-1} = d$. Теперь ясно, что $a^5 = 1$, и, поскольку автоморфизм ψ лежит в связной компоненте единицы группы автоморфизмов, то $a = 1$. Поэтому $d = 1$, и матрица автоморфизма ψ в выбранном базисе нижняя унитреугольная. Следовательно, связная компонента единицы группы автоморфизмов алгебры V содержится в группе SL_{18}.

Теперь обозначим тензор структурных констант умножения за c и предположим, что элемент $h \in SL_{18}$ умножает тензор c на число $t \in \mathbb{C}$ ($t \neq 0$). Существует скалярная матрица $g \in GL_{18}$, которая также умножает тензор c на число t, а именно, $g = t^{-1}\mathrm{id}_V$. Тогда матрица gh^{-1} сохраняет тензор c, т. е. она определяет автоморфизм алгебры V. Напомним, что мы понимаем группу автоморфизмов алгебры V как алгебраическую подгруппу группы GL_{18}, в частности, у неё конечное число компонент связности. Обозначим их количество за k. Тогда автоморфизм $(gh^{-1})^k$ лежит в связной компоненте единицы группы автоморфизмов. Следовательно, поскольку матрица g скалярна, то $g^k h^{-k} \in SL_{18}$, $g^k \in SL_{18}$, $g^{18k} = \mathrm{id}_V$, и t — корень из единицы степени $18k$. Таким образом, для числа t имеется только конечное множество возможностей.

Пример 4.27. Пример масштабируемой коммутативной ассоциативной алгебры размерности 2 с нильпотентными операторами умножения.

Такой пример построить проще. Рассмотрим двумерную алгебру с базисом x, y и умножением $x^2 = y$, $xy = yx = y^2 = 0$. Ясно, что эта алгебра коммутативна и ассоциативна, и что все операторы умножения нильпотентны. Линейный оператор $x \mapsto tx$, $y \mapsto t^{-1}y$ имеет определитель 1 и умножает единственную ненулевую структурную константу на t^3.

В случае $L = Sp_{2l}$ нам потребуется следующее определение. Определим ядро симметрической трилинейной формы (это определение аналогично определению для билинейных форм, но трилинейные формы рассматриваются не так часто, поэтому мы формулируем определение явно.)

Определение 4.28. Пусть V — векторное пространство, а c — полностью симметричная трилинейная форма на нём. Тогда *ядро* формы c — это множество таких векторов $v \in V$, что $c(v, u, w) = 0$ для любых векторов $u, w \in V$. Ядро формы c обозначается как $\ker c$.

Ясно, что если c — полностью симметричная трилинейная форма на векторном пространстве V, то её ядро $\ker c$ является линейным подпространством пространства V. Действительно, если $v, v' \in V$ и $c(v, u, w) = 0$ и $c(v', u, w) = 0$ для всех векторов $u, w \in V$, то $c(av + bv', u, w) = ac(v, u, w) + bc(v', u, w) = 0$ для всех векторов $u, w \in V$ и для всех чисел $a, b \in \mathbb{C}$.

Теперь мы готовы сформулировать теорему, классифицирующую все умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, с точностью до действия группы L.

Теорема 4.29. *Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, а V — некоторое её неприводимое представление. Пусть на пространстве V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеются ровно две возможности:*

1. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, и $V = V(\varpi_1)$ (тавтологическое представление) или $V = V(\varpi_l)$ (представление, двойственное к тавтологическому). Тогда классы эквивалентности умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, относительно действия группы L, параметризуются дизъюнктным объединением следующих двух множеств.*

   (a) *Классы изоморфизма масштабируемых коммутативных ассоциативных $(l+1)$-мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения.*

   (b) *Классы изоморфизма пар, состоящих из немасштабируемой коммутативной ассоциативной алгебры A с нильпотентными операторами умножения и ненулевой кососимметрической формы старшей степени на алгебре A. (Здесь имеется в виду, что изоморфизм* *между двумя такими парами должен сохранять как мультипликативную структуру на алгебре, так и кососимметрическую форму.)*

2. *$\mathfrak{l}$ — алгебра типа C_l ($l \geq 2$), и $V = V(\varpi_1)$ (тавтологическое представление). Тогда классы эквивалентности умножений на V относительно действия группы L параметризуются симметрическими трилинейными формами на пространстве V/V_1, где V_1 — некоторое фиксированное лагранжево подпространство, рассматриваемыми с точностью до действия группы $GL(V/V_1)$ на пространстве V/V_1.*

Доказательство. По теореме 4.23, все случаи, когда на представлении V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, уже перечислены в формулировке этой теоремы. Поэтому остаётся только доказать, что классы эквивалентности этих умножений относительно действия группы L в этих двух случаях перечислены правильно.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{l}$ — алгебра типа A_l, и $V = V_{\mathfrak{l}}(\varpi_1)$. (Как и выше, внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{l}$ меняет местами представления $V_{\mathfrak{l}}(\varpi_1)$ и $V_{\mathfrak{l}}(\varpi_l)$, поэтому представление $V_{\mathfrak{l}}(\varpi_l)$ не нужно рассматривать явно.) Итак, пусть группа $L = SL_{l+1}$ действует на $(l+1)$-мерном пространстве V и сохраняет некоторую кососимметрическую форму старшей степени ω.

Как мы уже знаем, в этом случае умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$ — это просто коммутативные ассоциативные умножения, такие что операторы умножения нильпотентны. Зафиксируем некоторое такое умножение, тогда пространство V станет коммутативной ассоциативной алгеброй. Обозначим её тензор структурных констант за $c \in V^* \otimes V^* \otimes V$.

Предположим сначала, что алгебра V масштабируемая, другими словами, что действие группы SL_{l+1} на пространстве V позволяет умножить тензор c на любое комплексное число. Тогда SL_{l+1}-орбита этого умножения совпадает с его GL_{l+1}-орбитой, поскольку центральный тор группы GL_{l+1} может только умножить тензор структурных констант на скаляр. Такие умножения находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма коммутативных ассоциативных $(l+1)$-мерных масштабируемых алгебр с нильпотентными операторами умножения.

Теперь предположим, что алгебра V немасштабируемая, т. е. действие группы SL_{l+1} позволяет умножить тензор c только на комплексные числа из некоторого конечного множества. Тогда GL_{l+1}-орбита этого умножения состоит из бесконечно многих SL_{l+1}-орбит, которые можно параметризовать следующим образом. Пусть дана некоторая немасштабируемая коммутативная ассоциативная $(l+1)$-мерная алгебра A с нильпотентными операторами умножения. Выберем форму старшей степени ν на алгебре A, и отождествим алгебру A с пространством V, так чтобы форма ν отождествлялась с формой ω. Это условие не определяет изоморфизм однозначно, и различные автоморфизмы, удовлетворяющие этому условию, отличаются в точности на действие группы SL_{l+1}. Следовательно, в этом случае умножения, согласованные с действием алгебры, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма пар, состоящих из коммутативной ассоциативной немасштабируемой $(l+1)$-мерной алгебры A с нильпотентными операторами умножения и ненулевой кососимметрической формой старшей степени на алгебре A, где изоморфизм сохраняет и форму, и умножение на алгебре.

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathfrak{l}$ — алгебра типа C_l, и $V = V(\varpi_1)$ (тавтологическое представление). Пусть группа $L = Sp_{2l}$ действует в $(2l)$-мерном векторном пространстве V и сохраняет невырожденную кососимметрическую билинейную форму ω. Зафиксируем в пространстве V некоторое лагранжево подпространство V_1.

Зафиксируем некоторое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, на пространстве V, и обозначим за c трилинейную форму, двойственную к этому умножению. Напомним, что это означает, что $c(u, v, w) = \omega(uv, w)$ для всех векторов $u, v, w \in V$. По теореме 4.23 c — полностью симметричная форма, такая что существует такое лагранжево подпространство $Y \subset V$, что $c(Y, V, V) = 0$.

Действие группы Sp_{2l} на пространстве V позволяет перевести любое лагранжево подпространство Y в лагранжево подпространство V_1, которое мы зафиксировали выше, поэтому не ограничивая общности, можно считать что $c(V_1, V, V) = 0$. Пусть d — другая полностью симметричная трилинейная форма на пространстве V, такая что $d(V_1, V, V) = 0$. Тогда форма c (соотв. d) определяет полностью симметричную трилинейную форму на пространстве V/V_1, обозначим эту форму на пространстве V/V_1 за c_1 (соотв. за d_1). Наша ближайшая цель — доказать, что существование элемента $g \in Sp_{2l}$, такого что $gc = d$, равносильно существованию элемента $h \in GL(V/V_1)$, такого что $hc_1 = d_1$.

Пусть $gc = d$ для некоторого элемента $g \in Sp_{2l}$. Тогда $g \ker c = \ker d$, $V_1 \subseteq \ker c$, и $V_1 \subseteq \ker d$. Выберем в пространстве V подпространство V_2, дополнительное к подпространству $\ker c$. Тогда подпространство gV_2 дополнительно к подпространству $\ker d$ в пространстве V. Поскольку подпространство V_1 содержится и в подпространстве $\ker c$, и в подпространстве $\ker d$, и подпространства $\ker c$ и $\ker d$ имеют равные размерности, то существует изоморфизм $g_1\colon \ker c \to \ker d$, ограничение которого на подпространство $V_1 \subseteq \ker c$ тождественно отображает его на подпространство V_1, рассматриваемое как $V_1 \subseteq \ker d$.

Рассмотрим следующий линейный автоморфизм g_2 пространства V (вообще говоря, не утверждается, что он сохраняет форму ω). Если $v \in \ker c \subseteq V$ (соотв. $v \in V_2 \subset V$), то $g_2 v = g_1 v$ (соотв. $g_2 v = gv$). Тогда для автоморфизма g_2^{-1} выполнены следующие равенства: если $v \in \ker d$ (соотв. $v \in gV_2$), то $g_2^{-1} v = g_1^{-1} v \in \ker c$ (соотв. $g_2^{-1} v = g^{-1} v \in V_2$). Если $u, v, w \in V$, $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ и $w = w_1 + w_2$, где $u_1, v_1, w_1 \in \ker d$ и $u_2, v_2, w_2 \in gV_2$, то $(g_2 c)(u, v, w) = c(g_2^{-1} u_1 + g_2^{-1} u_2, g_2^{-1} v_1 + g_2^{-1} v_2, g_2^{-1} w_1 + g_2^{-1} w_2) = c(g_1^{-1} u_1 + g^{-1} u_2, g_1^{-1} v_1 + g^{-1} v_2, g_1^{-1} w_1 + g^{-1} w_2)$. Ясно, что $g_1^{-1} u_1, g_1^{-1} v_1, g_1^{-1} w_1 \in \ker c$, поэтому $(g_2 c)(u, v, w) = c(g^{-1} u_2, g^{-1} v_2, g^{-1} w_2)$. Вспомним, что $g \ker c = \ker d$, поэтому $\ker c = g^{-1} \ker d$, и $g^{-1} u_1, g^{-1} v_1, g^{-1} w_1 \in \ker c$. Значит, $(g_2 c)(u, v, w) = c(g^{-1} u_1 + g^{-1} u_2, g^{-1} v_1 + g^{-1} v_2, g^{-1} w_1 + g^{-1} w_2) = c(g^{-1} u, g^{-1} v, g^{-1} w) = (gc)(u, v, w) = d(u, v, w)$. Следовательно, $g_2 c = d$. Но автоморфизм g_2 сохраняет подпространство V_1 по построению, поэтому он корректно определяет автоморфизм пространства V/V_1. Обозначим этот автоморфизм пространства V/V_1 за h. Тогда $hc_1 = d_1$.

Теперь предположим, что имеется такой линейный автоморфизм $h \in GL(V/V_1)$, что $hc_1 = d_1$. Выберем лагранжево подпространство $V_3 \subset V$, дополнительное к подпространству V_1. Тогда форма ω определяет невырожденное спаривание между подпространствами V_3 и V_1. Ограничение отображения факторизации $V \to V/V_1$ на пространство V_3 является изоморфизмом, обозначим его за $q\colon V_3 \to V/V_1$. Пусть $h_3 = q^{-1}hq$. Тогда, если h_1 — произвольный линейный автоморфизм пространства V_1, то оператор $g\colon V \to V$, определённый равенствами $gv = h_3 v$ (соотв. $gv = h_1 v$) при $v \in V_3$ (соотв. $v \in V_1$), переводит форму c в форму d. Поэтому обозначим за h_2 автоморфизм пространства V_1, двойственный к автоморфизму $h_3 \in GL(V_3)$ относительно формы ω, и пусть $h_1 = h_2^{-1}$. Тогда оператор g, описанный выше, сохраняет форму ω, $g \in Sp_{2l}$.

Теперь мы доказали, что оператор $g \in Sp_{2l}$, такой что $gc = d$, существует тогда и только тогда, когда существует оператор $h \in GL(V/V_1)$, такой что $hc_1 = d_1$. Следовательно, мы построили биекцию между умножениями, согласованными с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемыми с точностью до действия группы Sp_{2l}, и полностью симметричными трилинейными формами на пространстве V/V_1, рассматриваемыми с точностью до действия группы $GL(V/V_1)$. □

Теперь мы готовы рассмотреть случай конечномерного (но необязательно точного или неприводимого) представления V связной редуктивной (но необязательно простой) алгебраической группы L. На вопрос о существовании умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, можно ответить с помощью предложения 4.17 и теоремы 4.23, и теперь остаётся только дать подробное описание классов L-изоморфизма таких умножений. Пусть группа L и представление V удовлетворяют условиям предложения 4.17, т. е.

$[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]=\mathfrak{l}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{l}_s$, $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_t$, где каждое слагаемое $\mathfrak{l}_i$ — простая алгебра, каждое слагаемое V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$, и существует такой индекс r $(1\le r\le s,\ 1\le r\le t)$, что:

1. V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$ при $1\le i\le r$.

2. $\mathfrak{l}_i\cdot V_j=0$ при $1\le i,j\le r$, $i\ne j$.

3. $\mathfrak{l}_i\cdot V_j=0$ при $1\le i\le r$, $r<j\le t$.

4. $\mathfrak{l}_i\cdot V_j=0$ при $r<i\le s$, $1\le j\le r$.

Обозначим за $L_i\subseteq L$ такую связную простую алгебраическую группу, что $\operatorname{Lie} L_i=\mathfrak{l}_i$.

Тогда, по предложению 4.17, если на пространстве V задано умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то $V_iV_j=0$ для всех пар индексов i,j, кроме случаев, когда $i=j$ и $1\le i\le r$. Следовательно, по теореме 4.29, умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемые с точностью до действия коммутанта группы L, параметризуются наборами длины r, состоящими из коммутативных ассоциативных алгебр с нильпотентными операторами умножения (возможно, с заданной ненулевой кососимметрической формой старшей степени), симметрических трилинейных форм и, возможно, нулей, соответствующих таким индексам i, что на пространстве V_i не существует ненулевых умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}_i$. Теперь нужно профакторизовать эту параметризацию по действию максимального центрального тора T_1 группы L.

Заметим сначала, что действие тора T_1 на подпредставлениях V_i, где $i>r$, на подпредставлениях V_i, для которых алгебра $\mathfrak{l}_i$ не имеет тип A_l, и на подпредставлениях V_i, для которых алгебра $\mathfrak{l}_i$ имеет тип A_l, но само представление V_i не является тавтологическим или двойственным представлением алгебры $\mathfrak{l}_i$, не меняет параметризацию. Единственный нетривиальный случай, в котором это нужно проверить — это случай, когда $1\le i\le r$, алгебра $\mathfrak{l}_i$ имеет тип C_l, и V_i —

её тавтологическое представление. В этом случае умножения на пространстве V_i, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}_i$, рассматриваемые с точностью до действия группы L_i, параметризуются симметрическими трилинейными формами на пространстве V_i/Z, где $Z \subset V_i$ — некоторое фиксированное лагранжево подпространство, рассматриваемыми с точностью до действия группы $GL(V_i/Z)$. Если умножить такую форму на число $t \in \mathbb{C}$, то её продолжение на всё пространство V_i (обозначим это продолжение за c) тоже умножится на t, и тензор структурных констант двойственного умножения на пространстве V_i также умножится на t. Действие группы $GL(V_i/Z)$ позволяет умножить любую трилинейную форму на любое комплексное число, поэтому действие тора T_1 на пространстве V_i не меняет параметризацию умножений на пространстве V_i. Итак, для каждого индекса i $(1 \leq i \leq r)$, кроме индексов i, для которых алгебра $\mathfrak{l}_i$ имеет тип A_l, а V_i — её тавтологическое или двойственное представление, мы либо выбираем трилинейную форму, либо не выбираем ничего, как описано в теореме 4.29.

Теперь нужно профакторизовать по действию тора T_1 ту часть набора длины r, которая соответствует алгебрам типа A_l и их тавтологическим или двойственным представлениям. Чтобы определить элемент такого фактора, определим сначала для каждого индекса i, будет ли алгебра V_i масштабируемой или немасштабируемой.

Если для некоторого индекса i мы решили, что алгебра V_i будет масштабируемой, то действие тора T_1 не отождествляет умножения на пространстве V_i, которые уже не были отождествлены действием группы L_i. Поэтому для каждого такого индекса мы выбираем класс изоморфизма коммутативных ассоциативных масштабируемых $(\dim V_i)$-мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения.

Наконец, обозначим те индексы i, для которых алгебра V_i будет немасштабируемой, за $i_1, \ldots, i_k$. Обозначим также $n_j = \dim V_{i_j}$ $(1 \leq j \leq k)$. Предположим, что действие тора T_1 на пространстве V_{i_j} определяется характером χ_j. Тогда его действие на прямой $\Lambda^{n_j}V_{i_j}^*$ определяется характером $-n_j\chi_j$. Нужно выбрать k ненулевых кососимметрических форм старшей степени с точностью до действия этого тора, т. е. нужно выбрать орбиту тора в k-мерном пространстве

$$W = \oplus_{j=1}^{k}\Lambda^{n_j}(V_{i_j}^*),$$

так чтобы каждая координата (каждой) точки этой орбиты была ненулевой. Такие орбиты параметризуются значениями набора алгебраически независимых мономов Лорана, которые порождают решётку всех мономов Лорана, зависящих от координат на пространстве W и инвариантных относительно действия тора на пространстве W. Точное число этих мономов зависит от действия тора T_1 на пространстве W. Таким образом, для каждого индекса i_j нужно выбрать класс изоморфизма коммутативных ассоциативных немасштабируемых $(\dim V_{i_j})$-мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения. После этого нужно выбрать несколько ненулевых комплексных чисел, определяющих T_1-орбиту на пространстве W, как описано выше. Этот выбор завершает параметризацию умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемых с точностью до действия группы L.

Пример 4.30. Если $[L, L] = SL_n$, V — тавтологическое представление группы L и центральный тор T_1 группы L имеет размерность не меньше 1 и нетривиально действует на пространстве V (например, если V — тавтологическое представление группы $L = GL_n$), то тор T_1 действует на множестве ненулевых векторов в пространстве $\Lambda^n V^*$ транзитивно. Значит, нетривиальных T_1-инвариантных мономов Лорана нет, и умножения, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемые с точностью до действия группы L, находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами изоморфизма n-мерных коммутативных ассоциативных алгебр с нильпотентными операторами умножения.

4.5. Классификация локально транзитивных $(\mathbf{G}_a)^m$-действий на однородных пространствах

Теперь мы готовы классифицировать локально транзитивные $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на многообразии G/P. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.31. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, и пусть $P \subset G$ — такая параболическая подгруппа, что (G, P) — неисключительная пара. Обозначим $m = \dim(G/P)$.*

Если G — группа типа A_l и подгруппа P с точностью до сопряжения равна P_1 или P_l, то локально транзитивные действия $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ с точностью до G-сопряжения и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ параметризуются коммутативными ассоциативными m-мерными алгебрами с нильпотентными операторами умножения. Иначе, либо локально транзитивное действие $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ ровно одно с точностью до G-сопряжения и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (это верно тогда и только тогда, когда унипотентный радикал группы P коммутативен), либо локально транзитивных действий $(\mathbf{G}_a)^m : (G/P)$ нет вообще.

Доказательство. Сначала будем считать группу G присоединённой, многообразие G/P от этого не изменится. Чтобы доказать теорему 4.31, будем применять теорему 4.16 последовательно для всех случаев связной простой группы G и её параболической подгруппы P (рассматриваемой с точностью до сопряжения), в которых пара (G, P) неисключительная, и в которых существует хотя бы одно локально транзитивное $(\mathbf{G}_a)^m$-действие на многообразии (G/P) (случаи, которые нужно рассмотреть, перечислены в теореме 4.2). Мы будем использовать обозначения из раздела 2.1, в частности, будем считать, что подгруппа P содержит борелевскую подгруппу B, зафиксированную в разделе 2.1.

Подгруппа Леви L параболической подгруппы P локально изоморфна произведению своего коммутанта, который является связной полупростой группой, и своего центра, который является тором. Как мы уже указали в разделе 2.1, подгруппа $B\cap[L,L]$ — борелевская подгруппа в группе $[L,L]$, а $T\cap[L,L]$ — максимальный тор в ней, поэтому у нас уже есть система корней группы $[L,L]$, подмножество положительных корней группы $[L,L]$, решётка весов группы $[L,L]$ и подполугруппа доминантных весов группы $[L,L]$, канонически определённые борелевской подгруппой $B\subset G$ и максимальным тором $T\subset G$. Во всех рассматриваемых случаях, P — максимальная параболическая подгруппа, без ограничения общности, $P=P_i$. Схема Дынкина коммутанта группы L получается из схемы Дынкина группы G удалением i-й вершины[1], и тем самым система корней коммутанта группы L вкладывается в простых корней группы G. При этом вложении положительные (соотв. простые) корни коммутанта группы L переходят в положительные (соотв. простые) корни группы G.

Действие группы L на алгебре $\mathfrak{u}^-$ точно, и центральный тор группы L действует на алгебре $\mathfrak{u}^-$ нетривиально. Неприводимые L-подпредставления алгебры $\mathfrak{u}^-$ биективно соответствуют таким отрицательным корням β группы G, что разложение корня $-\beta$ в сумму простых корней содержит корень α_i и для любого индекса $j\neq i$ вектор $\beta-\alpha_j$ не лежит в системе корней группы G. (Более точно, подпространство $\mathfrak{g}_\beta$ — это младшее L-весовое подпространство в таком L-подпредставлении.) В частности, если максимальный корень группы G равен $\alpha=\sum n_j\alpha_j$, и $n_i=1$, то корень β обязан быть минимальным, и L-представление $\mathfrak{u}^-$ неприводимо. В этом случае легко также указать и старшее L-весовое подпространство, оно равно $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Числовая отметка старшего L-веса этого представления при простом корне α_j (понимаемом как простой корень группы L)

[1]При этом получится, вообще говоря, несвязная схема Дынкина, вершины которой будут пронумерованы индексами от 1 до $\operatorname{rk} G$ с пропущенным индексом i. После этого вершины каждой связной компоненты нужно перенумеровать заново, чтобы получилась некоторая схема Дынкина со стандартной нумерацией вершин. Если компонента связности схемы Дынкина имеет тип A, D или E_6, то это можно сделать более, чем одним способом. Эту неоднозначность мы разрешаем следующим образом. Если это возможно, мы перечисляем вершины в том же порядке, в котором они были перечислены (возможно, с пропусками номеров или начиная не с 1) в исходной схеме Дынкина группы G. Нам встретятся два случая, когда это невозможно: из схемы Дынкина E_6 получается схема Дынкина D_5 и из схемы Дынкина D_4 получается схема Дынкина A_3. В первом случае мы скажем, что вершина,имевшая номер 2 в схеме E_6, будет иметь номер 4 в схеме D_5. Во втором случае скажем, что из двух концевых вершин та, которая имела меньший номер в схеме D_4, будет иметь номер 1 в схеме A_3. После этого нумерация остальных вершин восстанавливается однозначно.

равна $-2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$.

4.5.1. Группа G типа A_l, $P = P_1$ или $P = P_l$

Случай $P = P_l$ сводится к случаю $P = P_1$ при помощи внешнего автоморфизма, поэтому далее, не ограничивая общности, будем считать, что $P = P_1$. Согласно сделанным выше замечаниям, коммутант группы L имеет тип A_{l-1}, представление группы L в пространстве $\mathfrak{u}^-$ неприводимо, и его старший вес как представления группы $[L, L]$ равен первому фундаментальному весу группы $[L, L]$, то есть это тавтологическое представление. Центральный тор группы L одномерен и действует на пространстве $\mathfrak{u}^-$ нетривиально. Из теоремы 4.29 и из рассуждений в примере 4.30 следует, что умножения на пространстве $\mathfrak{u}^-$, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемые с точностью до действия группы L, параметризуются классами изоморфизма l-мерных коммутативных ассоциативных алгебр с нильпотентными операторами умножения.

Чтобы доказать теорему 4.31 в этом случае, воспользуемся предложениями 4.3 и 4.6. Достаточно проверить, что если две коммутативных унипотентных подалгебры $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{p}^-$ и $\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{p}^-$, дополнительные к подалгебре $\mathfrak{l}$ в алгебре $\mathfrak{p}^-$, P-сопряжены, то они и L-сопряжены. Центр группы SL_{l+1} действует на алгебре $\mathfrak{sl}_{l+1}$ тривиально, поэтому для доказательства этого утверждения можно не считать группу G присоединённой, как раньше, а вместо этого считать, что $G = SL_{l+1}$. По лемме 4.9 можно считать, что $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{u}_1^-$ и $\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{u}_1^-$. Пусть $(\operatorname{Ad} p)\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ для некоторого элемента $p \in P$. Поскольку $P = L \ltimes U$, то можно написать $p = gu$, где $g \in L$, $u \in U$. Тогда $(\operatorname{Ad} u)\mathfrak{a}_1 = (\operatorname{Ad} g^{-1})\mathfrak{a}_2$. Далее будем записывать элементы группы $G = SL_{l+1}$ блочными матрицами со следующими размерами блоков:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1\times 1 & 1\times l \\ \hline l\times 1 & l\times l \end{array}\right).$$

Подгруппа L состоит из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right),$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in GL_l$, $a \det b = 1$. Матрицы из подалгебры $\mathfrak{a}_1$ лежат в подалгебре $\mathfrak{u}_0^-$, и поэтому имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a & b \end{array}\right),$$

где a может быть любым вектором-столбцом длины l, поскольку $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{l} = \mathfrak{p}^-$. Матрицы из подалгебры $\mathfrak{a}_2$ имеют такой же вид. Группа U состоит из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & \mathrm{id}_l \end{array}\right),$$

где a — произвольный вектор-строка длины l. Пусть

$$g = \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & y \end{array}\right), \quad u = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v \\ \hline 0 & \mathrm{id}_l \end{array}\right).$$

Допустим, что $u \neq \mathrm{id}_{l+1}$, тогда $v \neq 0$. Если

$$a_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_1' & a_1'' \end{array}\right) \in \mathfrak{a}_1,$$

то

$$ua_1u^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v \\ \hline 0 & \mathrm{id}_l \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_1' & a_1'' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -v \\ \hline 0 & \mathrm{id}_l \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} va_1' & -va_1'v + va_1'' \\ \hline a_1' & -a_1'v + a_1'' \end{array}\right).$$

Поскольку $v \neq 0$, то существует такой элемент $a_1 \in \mathfrak{a}_1$, что верхний левый элемент матрицы ua_1u^{-1} не равен нулю. С другой стороны, если

$$a_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_2' & a_2'' \end{array}\right) \in \mathfrak{a}_2,$$

то

$$g^{-1}a_2g = \left(\begin{array}{c|c} x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & y^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_2' & a_2'' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline y^{-1}a_2'x & y^{-1}a_2''y \end{array}\right),$$

то есть верхний левый элемент матрицы ga_2g^{-1} всегда равен нулю. Поэтому, если $u \neq \mathrm{id}_{l+1}$, то подалгебры $(\mathrm{Ad}\, u)\mathfrak{a}_1$ и $(\mathrm{Ad}\, g^{-1})\mathfrak{a}_2$ совпадать не могут. Следовательно, $u = \mathrm{id}_{l+1}$, $p = g \in L$, и подалгебры $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ L-сопряжены.

4.5.2. Группа G типа A_l, $P = P_i$, $1 < i < l$

Коммутант группы L локально изоморфен группе $SL_i \times SL_{l+1-i}$, подалгебра $\mathfrak{u}^-$ как $[L, L]$-представление изоморфна представлению $V_{SL_i}(\varpi_{i-1}^{(1)}) \otimes V_{SL_{l+i-1}}(\varpi_1^{(2)})$, где $\varpi_{i-1}^{(1)}$ (соотв. $\varpi_1^{(2)}$) — фундаментальный вес группы SL_i (соотв. SL_{l+i-1}), соответствующий её $(i-1)$-му (соотв. первому) простому корню. По предложению 4.17 ненулевых умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует.

4.5.3. Группа G не типа A_l

Рассмотрение всех оставшихся случаев (группа G типа B_l, C_l, D_l, E_6 или E_7) происходит полностью единообразно. Мы вычисляем коммутант группы L, он оказывается простой группой (кроме того, коммутант связной группы всегда связен). Далее мы проверяем, что алгебра $\mathfrak{u}^-$ как представление группы L неприводима, и находим старший $[L, L]$-вес этого представления (напомним, что у нас уже есть полугруппа доминантных весов группы $[L, L]$, определённая выбором борелевской подгруппы и максимального тора в группе G). Наконец, мы видим, что по теореме 4.23 для этого представления не существует нетривиальных умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Эти вычисления содержатся в таблице 4.2. Здесь ϖ_i обозначает фундаментальный вес группы $[L, L]$, соответствующий i-му простому корню.

Таблица 4.2

Тип группы G	P	Тип группы $[L, L]$	Старший $[L, L]$-вес алгебры $\mathfrak{u}^-$
B_l $(l \geq 3)$	P_1	B_{l-1}	ϖ_1
C_l $(l \geq 2)$	P_l	A_{l-1}	$2\varpi_{l-1}$
D_4	P_1, P_3, P_4	A_3	ϖ_2
D_l $(l \geq 5)$	P_1	D_{l-1}	ϖ_1
D_l $(l \geq 5)$	P_{l-1}, P_l	A_{l-1}	ϖ_{l-2}
E_6	P_1, P_6	D_5	ϖ_5
E_7	P_7	E_6	ϖ_6

Теорема 4.31 доказана. $\square$

Литература

[1] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, *Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P*, УМН, **28**:3(171) (1973), 3–26.

[2] Э. Б. Винберг, *Сложность действий редуктивных групп*, Функц. анализ и его прил. **20**:1 (1986), 1–13.

[3] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, *Группы Ли и алгебры Ли III*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления **41**, ВИНИТИ, М., 1990.

[4] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.

[5] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995.

[6] Е. В. Шаройко, *Соответствие Хассета-Чинкеля и автоморфизмы квадрики*, Матем. сб. **200**:11 (2009), 145–160. См. также arXiv:0902.4529v1 [math.RT], 26 февраля 2009 г.

[7] I. V. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **139**:3 (2011), 783–786. См. также arXiv:1003.2358v2 [math.AG], 18 марта 2010 г.

[8] N. Bourbaki, *Groupes et algébres de Lie, Chaps. 4,5 et 6*, Hermann, Paris, 1975.

[9] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55**:2 (1986), 191–198.

[10] M. Brion, *Spherical Varieties*, Highlights in Lie Algebraic Methods, 3–24, Progress in Mathematics **295**, Birkhauser, Basel, 2012.

[11] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39**:2 (1977), 179–186.

[12] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud. **131**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[13] B. Hasset, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* G_a^n, International Mathematics Research Notices, **1999**:22 (1999), 1211–1230. См. также arXiv:math/9902073v1 [math.AG], 11 февраля 1999 г.

[14] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.

[15] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Barcelona–Budapest–Hong Kong–London–Milan–Paris–Santa Clara–Singapore–Tokyo, 1996.

[16] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra **166**:1 (1994), 142–157.

[17] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141**:1 (1999), 97–118. См. также arXiv:math/9805067v1 [math.AG], 14 мая 1998 г.

[18] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Algebra **230**:1 (2000), 245–265. См. также arXiv:math/9807061v1 [math.AG], 12 июля 1998 г.

[19] H. Matsumura, F. Oort, *Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes*, Invent. Math. **4** (1967), 1–25.

[20] N. Perrin, *On the geometry of spherical varieties*, Transformation Groups **19**:1 (2014), 171–223.

[21] V.L. Popov, *Generically multiple transitive algebraic group actions*, Algebraic groups and homogeneous spaces, 481–523, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007. См. также arXiv:math/0409024v2 [math.AG], 5 марта 2005 г.

[22] C. P. Ramanujam, *A note on groups of algebraic varieties*, Math. Ann. **156** (1964), 25–33.

[23] J. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters.*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.

Публикации по теме диссертации

[24] R. Devyatov, *Generically transitive actions on multiple flag varieties*, International Mathematics Research Notices, **2014**:11 (2014), 2972–2989.

[25] Р. А. Девятов, *Действия коммутативной унипотентной группы на многообразиях флагов и нильпотентные умножения*, УМН, **69**:5(419) (2014), 165–166.

[26] Р. А. Девятов, *Локальная транзитивность для кратных многообразий флагов*, Вторая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Москва, Россия, 31 января – 5 февраля 2011 г. Тезисы докладов. Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2011, 23–26.

[27] R. Devyatov, *Unipotent commutative group actions on flag varieties and nilpotent multiplications*, Transformation Groups, **20**:1 (2015), 21–64.