



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Семинар аспирантской школы по компьютерным наукам

Математические модели задач, возникающих при анализе функционирования транспортных систем

Докладчик:

Федин Геннадий Геннадьевич

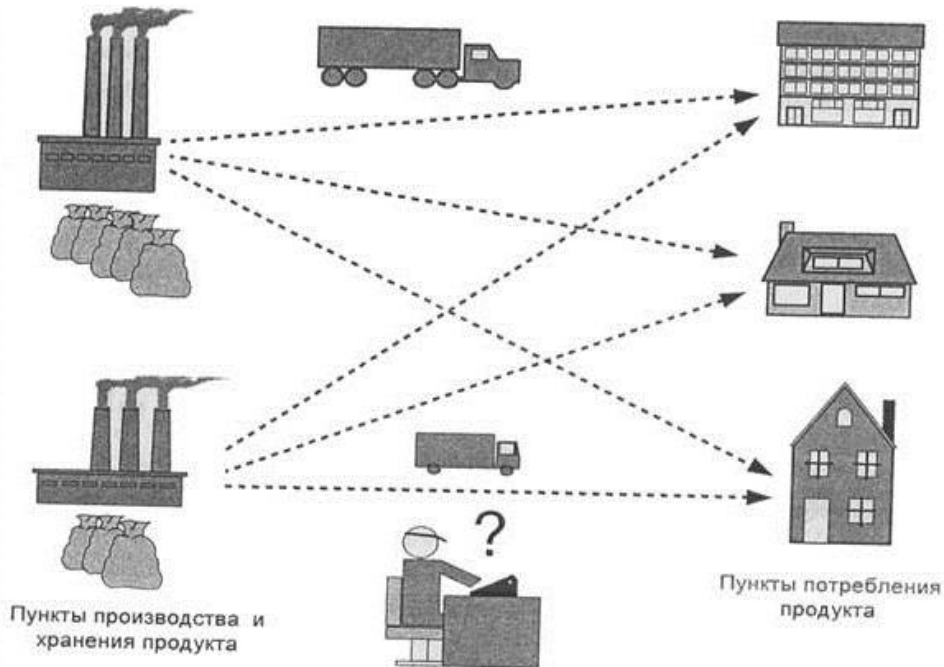
Научный руководитель:

проф. Беленький Александр Соломонович

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. Программное обеспечение
 - Для решения задач линейного программирования
 - Для решения задач смешанного программирования

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. Программное обеспечение
 - Для решения задач линейного программирования
 - Для решения задач смешанного программирования

Транспортные задачи



$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_x$$

$$\forall j = 1, \dots, m, \quad \sum_i x_{ij} = a_j$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_j x_{ij} = b_i$$

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0$$

- Минимизация транспортных издержек
- Непрерывные переменные
- Задачи линейного программирования



Транспортные задачи



1. **Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы**
 - Транспортные задачи
 - **Задачи размещения транспортных узлов**
2. Методы решения
3. Программное обеспечение
 - Для решения задач линейного программирования
 - Для решения задач смешанного программирования

p-Hub Median Problem

n – количество клиентов
 p – количество узлов для размещения
 d_{ij} – расстояние между вершинами
 a_i - «важность» каждого пункта

$$\sum_i \sum_j a_i d_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \min_x$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \sum_j x_{i,j} = 1$$

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j, x_{j,j} \geq x_{i,j}$$

$$\sum_i x_{i,i} = p$$

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, x_{i,j} \in \{0,1\}$$

- ReVelle C.S., «Central facilities location», Geographical Analysis, 1970, 30-42

Задачи о размещении транспортных узлов

Типы

Постановка задачи	Условия на граф из транспортных узлов (*)
Планарная	Полный граф
Дискретная	Звезда
	Дерево
	Линия

Целевая функция	Пропускные способности
Минимакс	Ограниченные
Минисум	Неограниченные

- Alumur S., «Network hub location problems: The state of the art», European Journal of Operational Research, 2008, 1-21

Capacitated p-Hub Median Problem

$$\sum_i \sum_j a_i d_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \min_x$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \sum_j x_{i,j} = 1$$

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j, x_{j,j} \geq x_{i,j}$$

$$\sum_i x_{i,i} = p$$

$$\forall i = 1, \dots, n, Q_j x_{j,j} \geq \sum_i a_i x_{i,j}$$

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, x_{i,j} \in \{0,1\}$$

- ReVelle C.S., «Central facilities location», Geographical Analysis, 1970, 30-42

Задачи о размещении транспортных узлов

Типы

Стоимость размещения узлов	Стоимость «присоединения»
Постоянная	Постоянная
Переменная	Переменная

Тип связей	Количество размещаемых узлов
Односвязные	Задано
Многосвязные	Не задано

- Alumur S., «Network hub location problems: The state of the art», European Journal of Operational Research, 2008, 1-21

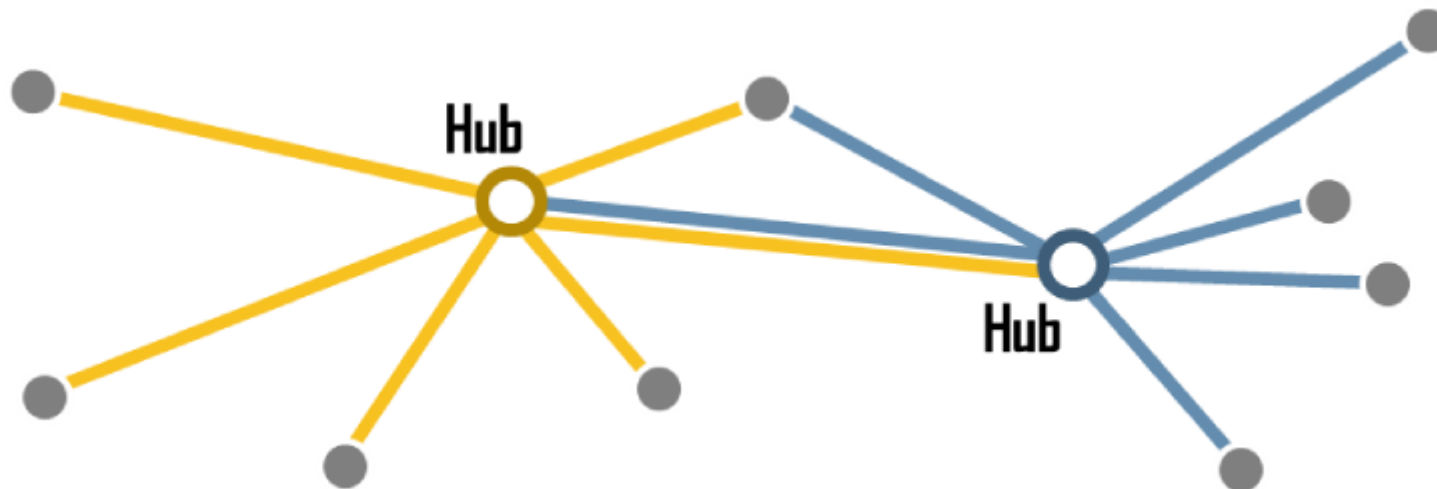
Capacitated Hub Median Problem

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \sum_j a_i d_{i,j} x_{i,j} + \sum_i f_i x_{i,i} \rightarrow \min_x \\
 & \forall i = 1, \dots, n, \sum_j x_{i,j} = 1 \\
 & \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j, x_{j,j} \geq x_{i,j} \\
 & \sum_i x_{i,i} = p \\
 & \forall i = 1, \dots, n, Q_j x_{j,j} \geq \sum_i a_i x_{i,j} \\
 & \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, x_{i,j} \in \{0,1\}
 \end{aligned}$$

- ReVelle C.S., «Central facilities location», Geographical Analysis, 1970, 30-42

Задачи о размещении транспортных узлов

Hub Location Problem



- Подграф транспортных узлов полный
- Все перевозки осуществляются через транспортные узлы
- Транспортировка между узлами дешевле

p-Hub Location Problem

$$C_{i,j,k,l} = \chi d_{i,k} + \alpha d_{k,l} + \delta d_{l,j},$$

$$H_k = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } k - \text{узел,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X_{i,j,k,l}$ – доля потока $W_{i,j}$

$$\sum_i \sum_k \sum_l \sum_j W_{i,j} C_{i,j,k,l} X_{i,j,k,l} \rightarrow \min_X$$

$$\sum_k H_k = p$$

$$\forall i, j = 1, \dots, n, \sum_k \sum_l X_{i,j,k,l} = 1$$

$$\forall i, j, k = 1, \dots, n, \sum_l X_{i,j,k,l} \leq H_k$$

$$\forall i, j, l = 1, \dots, n, \sum_k X_{i,j,k,l} \leq H_k$$

$$\forall k = 1, \dots, n, H_k \in \{0, 1\}$$

$$\forall i, j, k, l = 1, \dots, n, X_{i,j,k,l} \geq 0$$

- Ernst T. A., «Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem», European Journal of Operational Research, 1998, 100-112

Задачи о размещении транспортных узлов

Приложение

Область	Количество работ
Авиатранспорт	18
Экстренные службы	2
Службы доставки	6
Цепи поставок	4
Телекоммуникации	6
Наземный транспорт	18

- Farahani R.Z., «Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications», Computers & Industrial Engineering, 2013, 1096-1109

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. Программное обеспечение
 - Для решения задач линейного программирования
 - Для решения задач смешанного программирования

Методы решения

Exact	Constructive heuristics	Mathematical programming	Local search	MetaHeuristics
• Benders decomposition method • Branch and Cut	• Greedy • Stingy • Dual ascent • Composite	• Dynamic programming • Lagrangian relaxation • Aggregation	• Alternate • Interchange	• Tabu search • Variable neighborhood search • Generic search • Simulated annealing • Heuristic concentration • Scatter search • Ant colony • Neural networks • Decomposition • Hybrids

- Mladenovic N., «The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches», European Journal of Operational Research, 2007, 927–939
- Farahani R.Z., «Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications», Computers & Industrial Engineering, 2013, 1096-1109

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. **Программное обеспечение**
 - Для решения задач линейного программирования
 - Для решения задач смешанного программирования

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. **Программное обеспечение**
 - **Для решения задач линейного программирования**
 - Для решения задач смешанного программирования

Программное обеспечение Для решения задач линейного программирования

- 40 задач
- Максимальное время работы 25,000 секунд
- i7-4790K, 4.0GHz, 32GB
- Максимальное количество ненулевых элементов 12,372,358
- Максимальное количество столбцов 1,259,121
- Максимальное количество строк 986,069

Название	Коммерческое ПО	Медианное время (сек)
XPRESS	Да	21
GUROBI	Да	24
CLP	Нет	27
CPLEX	Да	47
MOSEK	Да	90
Google-GLOP	Нет	233
MATLAB	Да	273
SOPLEX	Нет	285
GLPK	Нет	2640
LP_SOLVE	Нет	13047

- <http://plato.asu.edu/ftp/lpsimp.html>

1. Задачи возникающие при анализе функционирования транспортной системы
 - Транспортные задачи
 - Задачи размещения транспортных узлов
2. Методы решения
3. **Программное обеспечение**
 - Для решения задач линейного программирования
 - **Для решения задач смешанного программирования**

Программное обеспечение Для решения задач смешанного программирования

- 212 решенных задач из MIPLIB2010
- Максимальное время работы 7,200 секунд
- Intel Xeon X5680, 3.3GHz, 32GB

Название	Последняя версия	Коммерческое ПО	Количество решенных задач	Относительная скорость
CPLEX	12.6.3	Да	199	1.12
GUROBI	6.5	Да	203	1
XPRESS	7.9	Да	171	2.01
CBC	2.9.4	Нет	113	14
FiberSCIP	3.2.0	Да	143	7.96

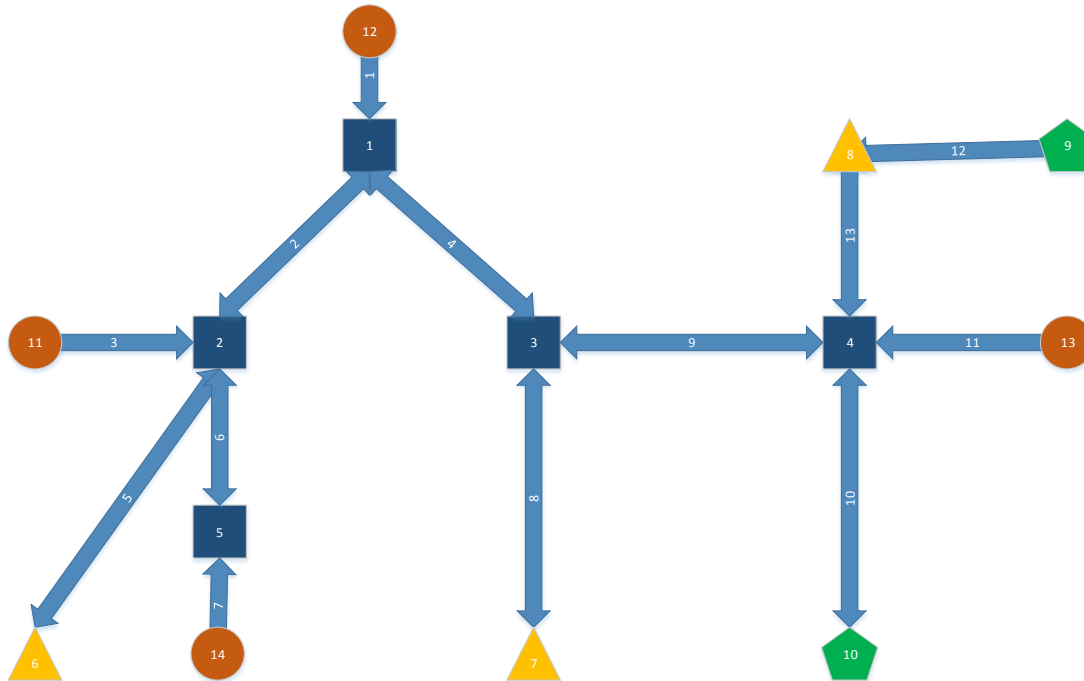
- <http://plato.asu.edu/ftp/solvable.html>



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

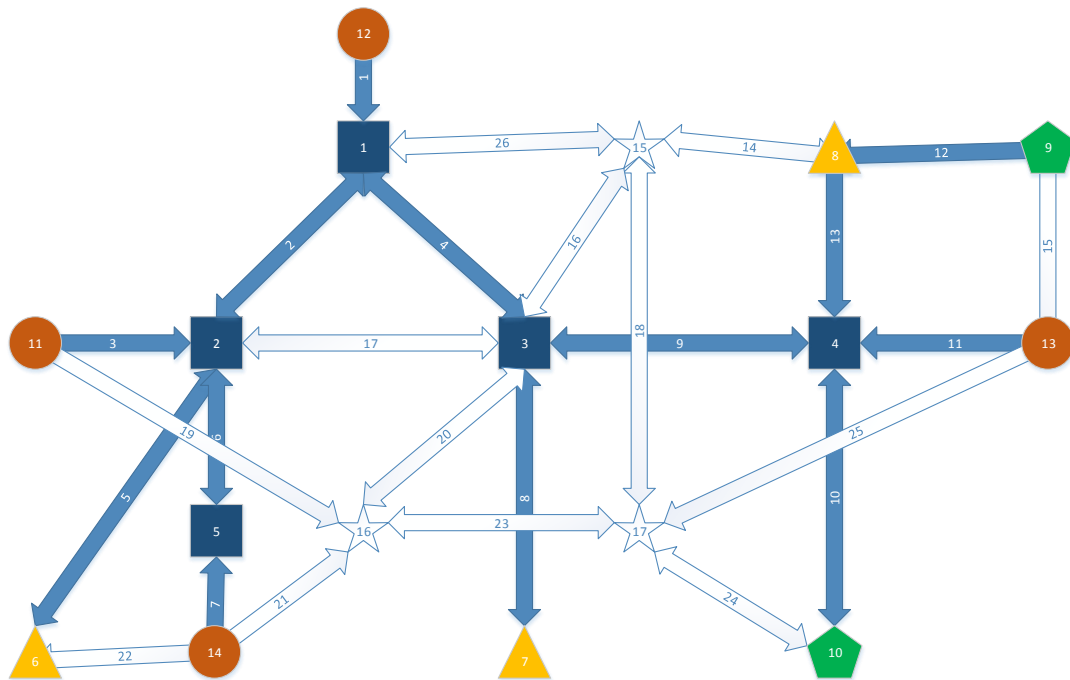
Спасибо
за внимание!

Схема транспортной сети



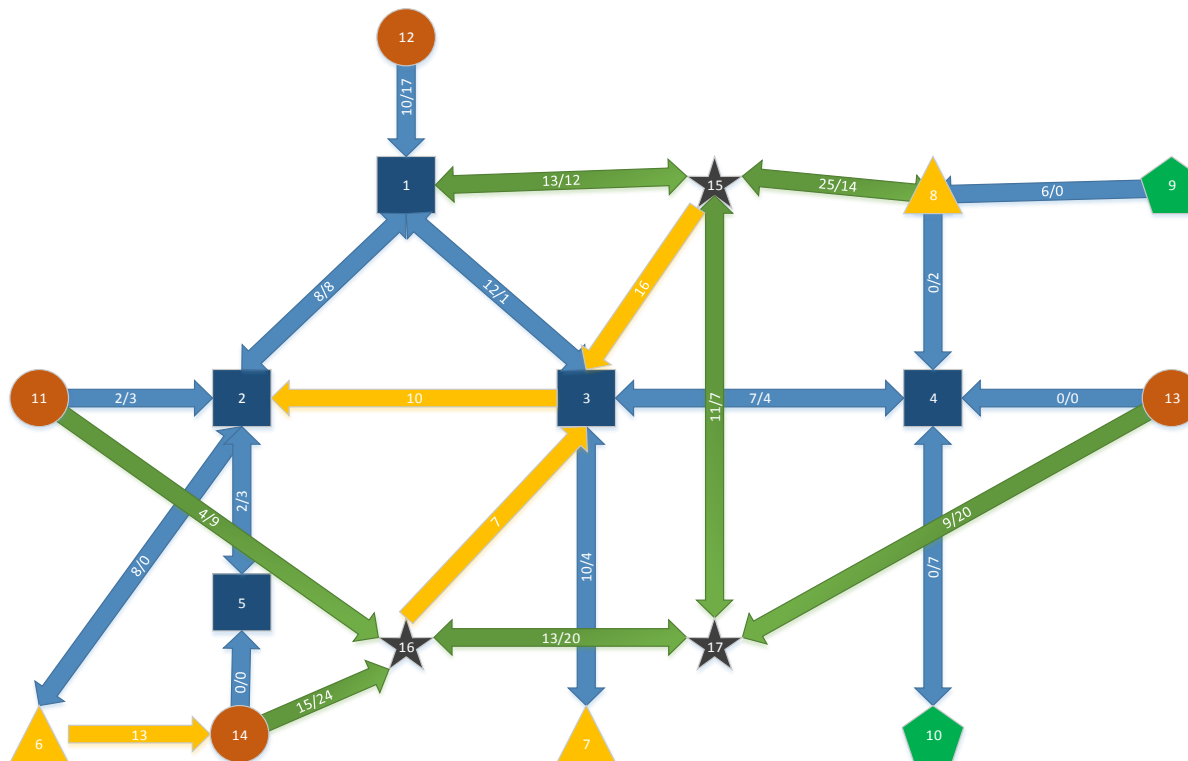
Грузопотоки в сети

№	Номер вершины отправителя	Номер вершины получателя	Мощность грузопотока
1	11	12	3
2	12	11	2
3	12	14	2
4	14	12	7
5	12	13	4
6	13	12	3
7	11	14	4
8	14	11	2
9	11	13	5
10	13	11	2
...	...	...	...
26	8	2	2
27	8	14	5
28	6	13	5
29	7	14	4
30	12	7	2
31	8	1	4
32	8	12	4
33	10	1	3



Объект	Пропускная способность объекта	Удельные издержки на обслуживание	Удельная стоимость использования
Существующая дуга	20	4	0
Добавляемая дуга (стоимость строительства 30)	30	1	1
Существующая вершина	50	5	1 (0 для городов)
Добавляемый транспортный узел (стоимость строительства 100)	100	1	2

Схема транспортной сети с найденным планом модернизации



640 ограничений и 1745 переменных (29 булевых).