НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Суммы read-once многочленов

Андрей Плосконосов

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

1 апреля 2016 г.

Арифметическая формула – это бинарное дерево, снабженное следующей структурой:
Листы помечены переменными x_i, а внутренние вершины – знаком «$+$» или «$*$».
Кроме того каждая вершина помечен двумя константами a и b.

Лист помеченный переменной x_i и константами a и b вычисляет многочлен $ax_i + b$.
Внутренняя вершина, помеченная операцией $\star$ вычисляет многочлен $a(f_1 \star f_2) + b$, где f_1 и f_2 — многочлены, вычисляемые потомками этой вершины.

Формулировка

M_n – Множество мультилинейных многочленов от n переменных.
Σ_k^n – Множество многочленов в M_n, представимых в виде суммы из k ROPов.
Имеет место следующая цепочка включений:

$$\Sigma_1^n \subset \Sigma_2^n \subset \ldots \subset \Sigma_k^n \subset \Sigma_{k+1}^n \subset \ldots \subset \Sigma_{2^n}^n = M_n.$$

Пусть $k^*(n)$ – это минимальное k, такое что $\Sigma_k^n = M_n$.
Теорема[1]**.** $k^*(n) = O(\frac{2^n}{n})$, над бесконечным полем также $k^*(n) = \Omega(\frac{2^n}{n})$.

[1] Теорема усиливает один из результатов этой работы: http://eccc.hpi-web.de/report/2015/204/

Булев куб B_n это множество строк длины n из нулей и единиц.
Расстояние Хэмминга $d(a,b) = |\{i|a_i \neq b_i\}|$.
$c_i \in B_{\lceil \log(n+1) \rceil}$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ — двоичная запись числа i.
A — матрица, состоящая из столбцов c_i $(i \in \{1,\ldots,n\})$.
Код Хэмминга — множество $\{s \in B_n | A \cdot s = \overrightarrow{0}\}$.
Удалим из матрицы A строку со старшими битами чисел.
Лемма. Множество шаров радиуса 1 с центрами в s, таких что $A \cdot s = \overrightarrow{0}$ образует покрытие булева куба размера не более $2 \cdot \frac{2^n}{n+1}$.

Пример $n = 5$ (размер матрицы $\lceil \log(n+1) \rceil \times n = 3 \times 5$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Код Хэмминга состоит из 4 векторов:
(0,0,0,0,0) , (1,1,1,0,0), (1,0,0,1,1), (0,1,1,1,1)
При удалении нижней строки в проверочной матрице, добавится еще 4:
(0,0,0,1,0) , (1,1,1,1,0), (1,0,0,0,1), (0,1,1,0,1)

Оценка сверху

формула

Пусть e_i — строка из n битов, у которой i-тый бит равен 1, а остальные равны 0.

Для любой строки $s = s_1 s_2 \dots s_n$ положим:

$x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$

$I_s = \{i | s_i = 1\}$

$J_s = \{j | s_j = 0\}$

$$\prod_{i \in I_s} (x_i + a_i) + \left(a_0 - 1 + \sum_{j \in J_s} a_j x_j \right) \cdot \prod_{i \in I_s} x_i.$$

Этот многочлен имеет коэффициент a_0 при x_s и коэффициенты a_i при x^{s+e_i}. Остальные его ненулевые коэффициенты стоят при мономах меньшей степени. Также заметим что он является суммой двух ROPов.