Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

Эффективный алгоритм минимизации диаметра взвешенного дерева при добавлении одного ребра фиксированного веса

Аспирант 1-го года обучения
Глеб Евстропов
Научный руководитель:
К.ф.-м.н. Бабенко Максим Александрович

Москва, 2016

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$
- $k << n, m$

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$
- $k << n, m$
- $A = \{(u_1, v_1, l_1), (u_2, v_2, l_2), \ldots ,(u_k, v_k, l_k)\}$

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$
- $k << n, m$
- $A = \{(u_1, v_1, l_1), (u_2, v_2, l_2), \dots ,(u_k, v_k, l_k)\}$
- $p(u, v) = ShortestPath(u, v)$

Shortcut problem

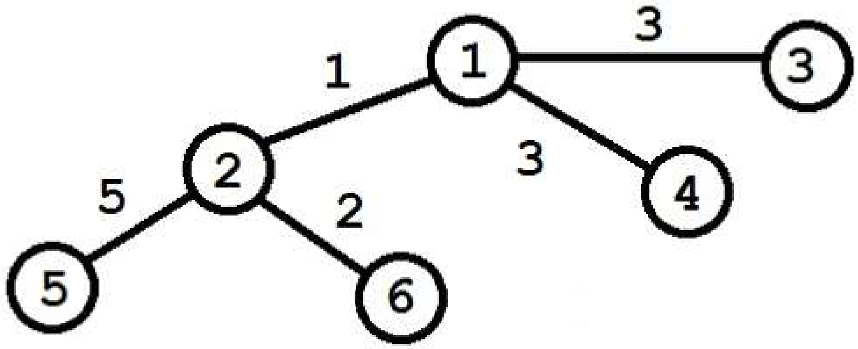
- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$
- $k << n, m$
- $A = \{(u_1, v_1, l_1), (u_2, v_2, l_2), \ldots ,(u_k, v_k, l_k)\}$
- $p(u, v) = \text{ShortestPath}(u, v)$
- $d(G) = \max (p(u, v))$ по всем (u, v) в $V \times V$

Shortcut problem

- Дан граф $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$
- $l(e) > 0$
- $k << n, m$
- $A = \{(u_1, v_1, l_1), (u_2, v_2, l_2), \dots ,(u_k, v_k, l_k)\}$
- $p(u, v) = ShortestPath(u, v)$
- $d(G) = \max (p(u, v))$ по всем (u, v) в $V \times V$
- Выбрать A, так чтобы $d(G'(V(G), E(G) + A)) \to \min$

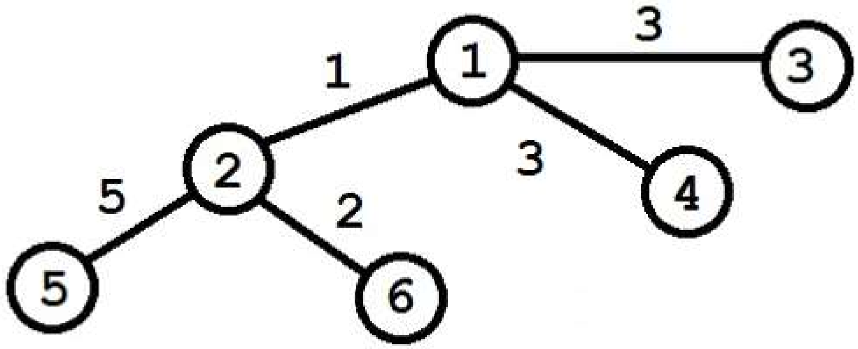
Постановка задачи

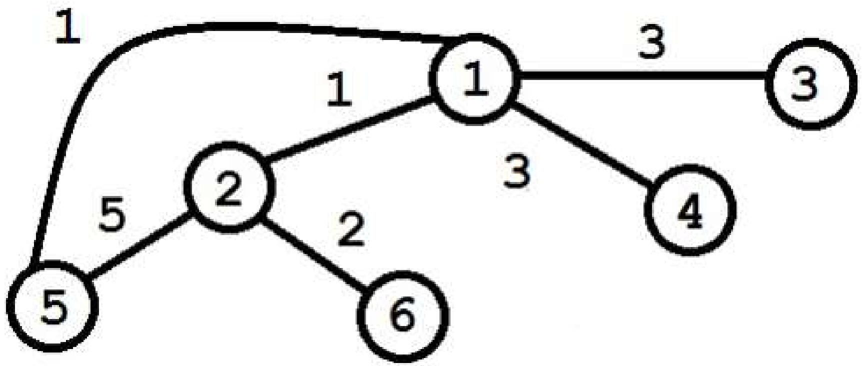
- Дано дерево T = (V, E)
- $|V| = n$, $|E| = |V| - 1$
- $l(e) > 0$
- $k = 1$, $l_1 = c$
- Выбрать (u, v), $d(G'(V(G), E(G) + (u, v))) \to \min$



Постановка задачи

- Дано дерево T = (V, E)
- |V| = n, |E| = |V| - 1
- l(e) > 0
- k = 1, l_1= c
- Выбрать (u, v), d(G’(V(G), E(G) + (u, v))) -> min





Наивные решения

Наивные решения

- Перебор всего пространства вариантов

Наивные решения

- Перебор всего пространства вариантов
- Floyd: $O(n^5)$

Наивные решения

- Перебор всего пространства вариантов
- Floyd: $O(n^5)$
- DFS: $O(n^4)$

Наивные решения

- Перебор всего пространства вариантов
- Floyd: $O(n^5)$
- DFS: $O(n^4)$
- RMQ: $O(n^3 \log n)$

Наивные решения

- Перебор всего пространства вариантов
- Floyd: $O(n^5)$
- DFS: $O(n^4)$
- RMQ: $O(n^3 \log n)$
- MinQueue: $O(n^3)$

Базовая лемма

Для любого диаметра найдётся оптимальный ответ, концы которого лежат на данном диаметре

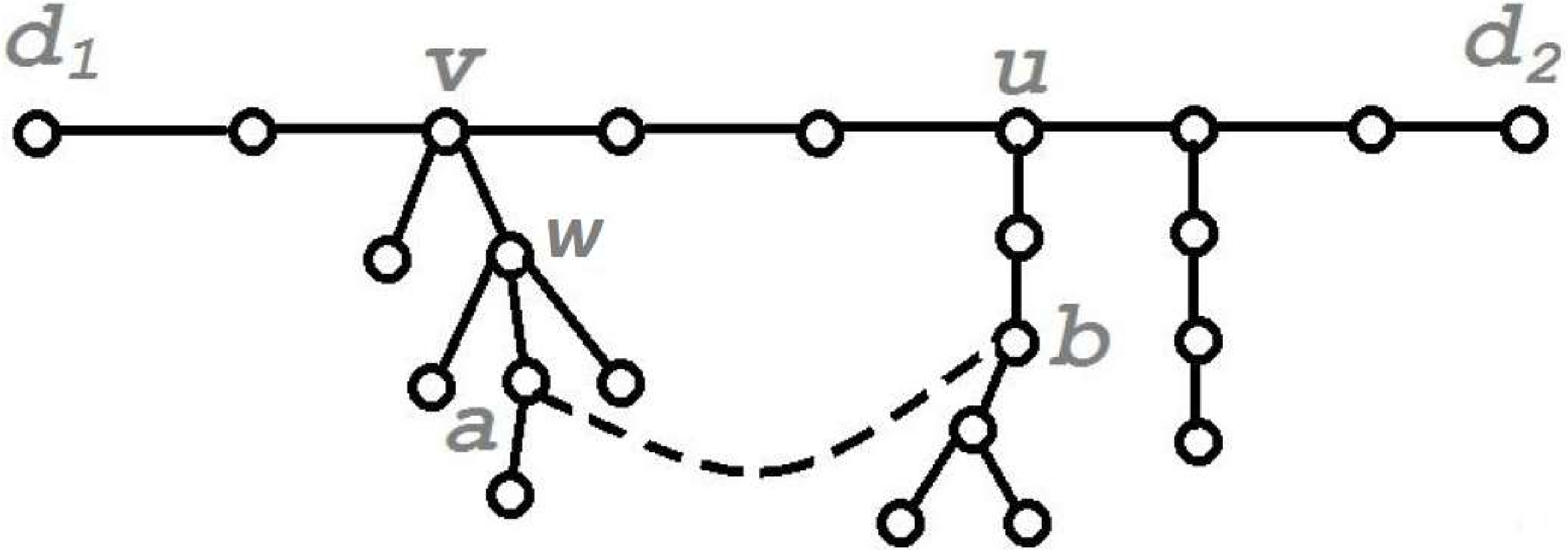
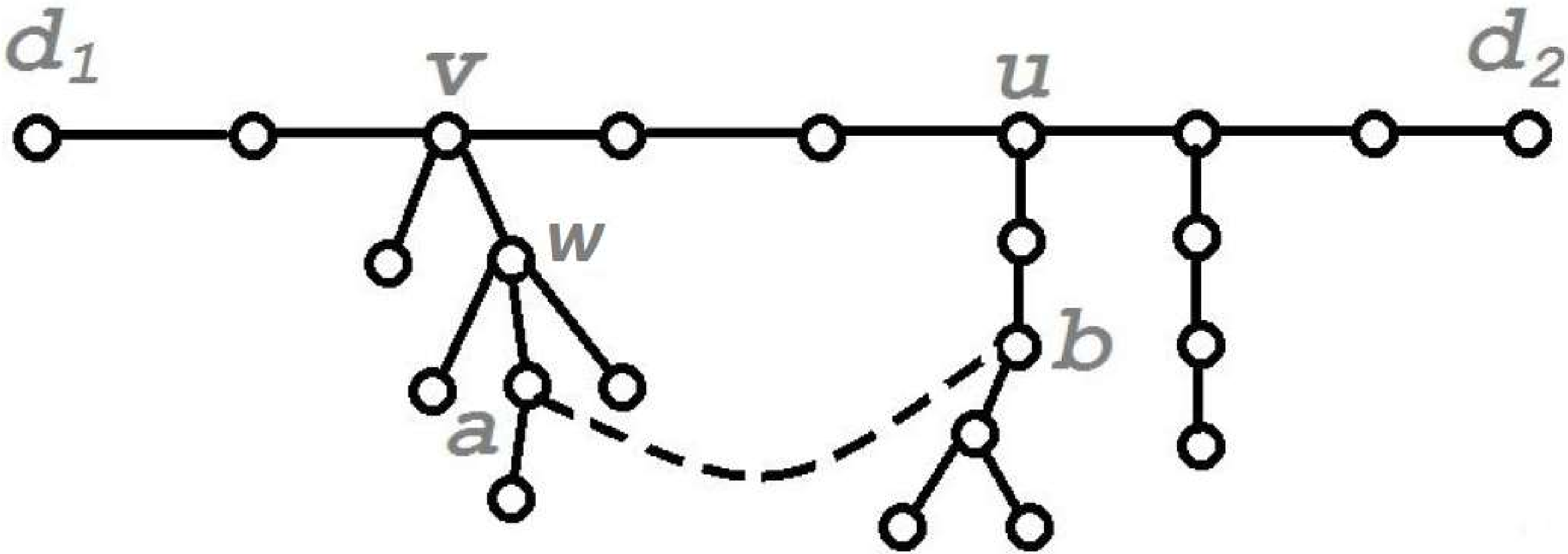


Схема доказательства

Зафиксируем какой-нибудь правильный ответ, покажем, что можно подвинуть на один шаг в сторону диаметра. Для любой пары (p, q) мы предъявим пару (p’, q’), которая будет мажорировать её в обоих графах, при этом расстояние для данной пары не ухудшится.

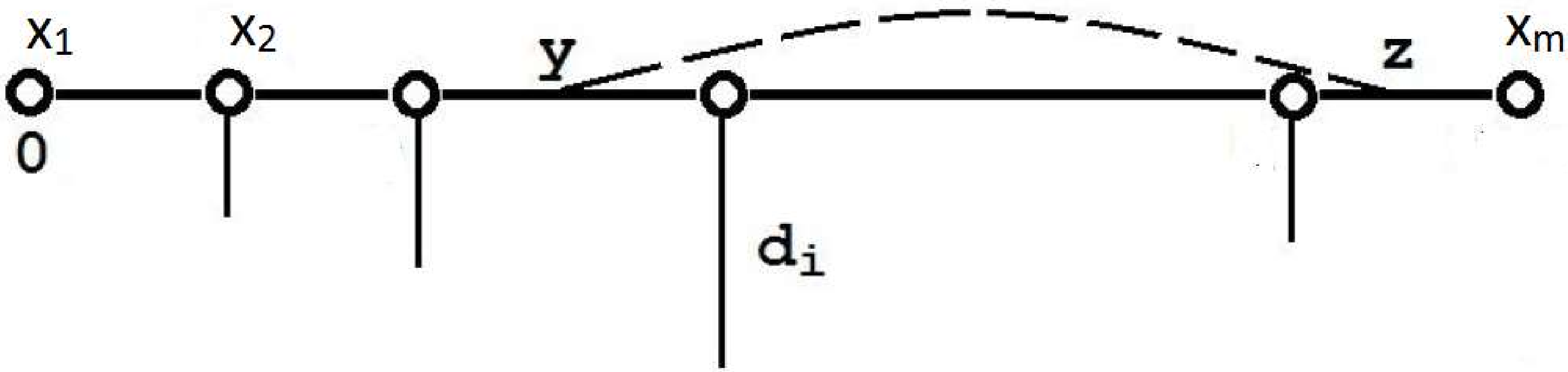


Переформулировка задачи

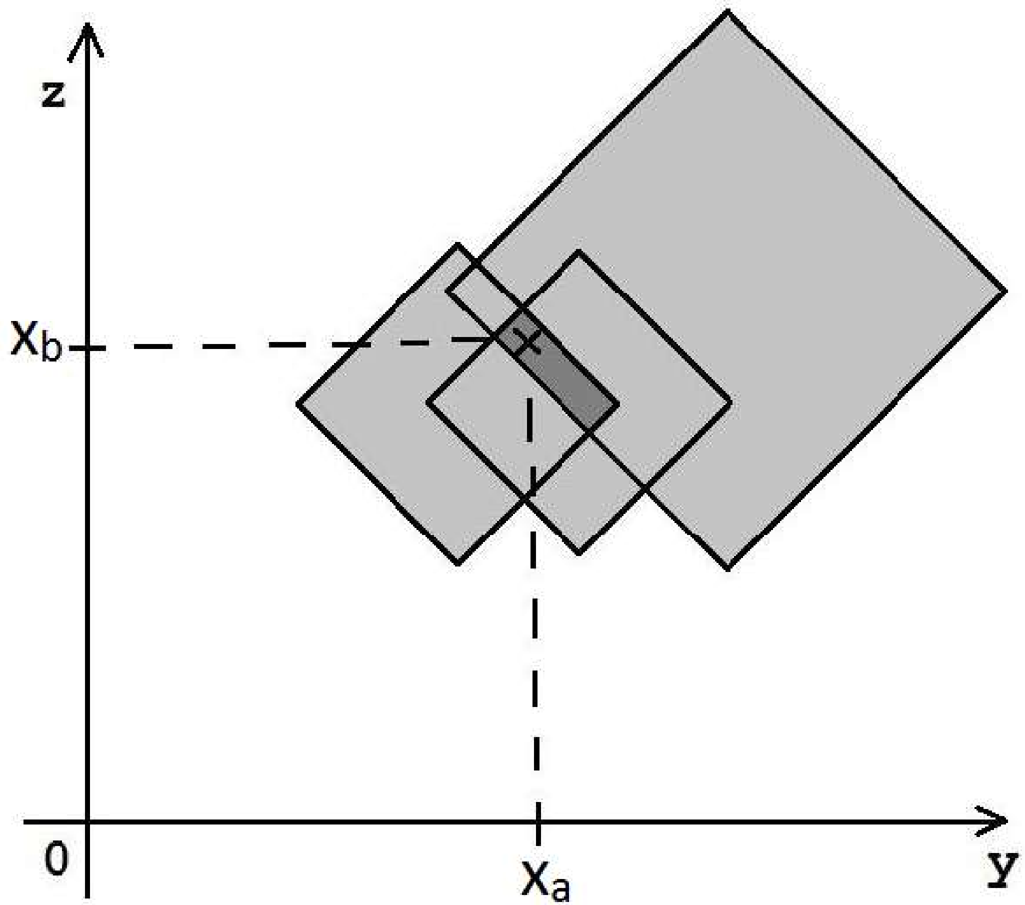
- Дана последовательность x_0, x_1, x_2, …, x_n, такая что $x_0 = 0$, $x_{i+1} > x_i$
- Дана последовательно d_0, $d_{1,}$ d_2 ,…, d_n , такая что $d_0 = d_n = 0$, $d_i \geq 0$
- Выбрать пару (a, b), минимизирующую

$\max(\min(d_i + d_j + |x_j - x_i|, d_i + d_j + |x_a - x_i| + |x_b - x_j| + c)$

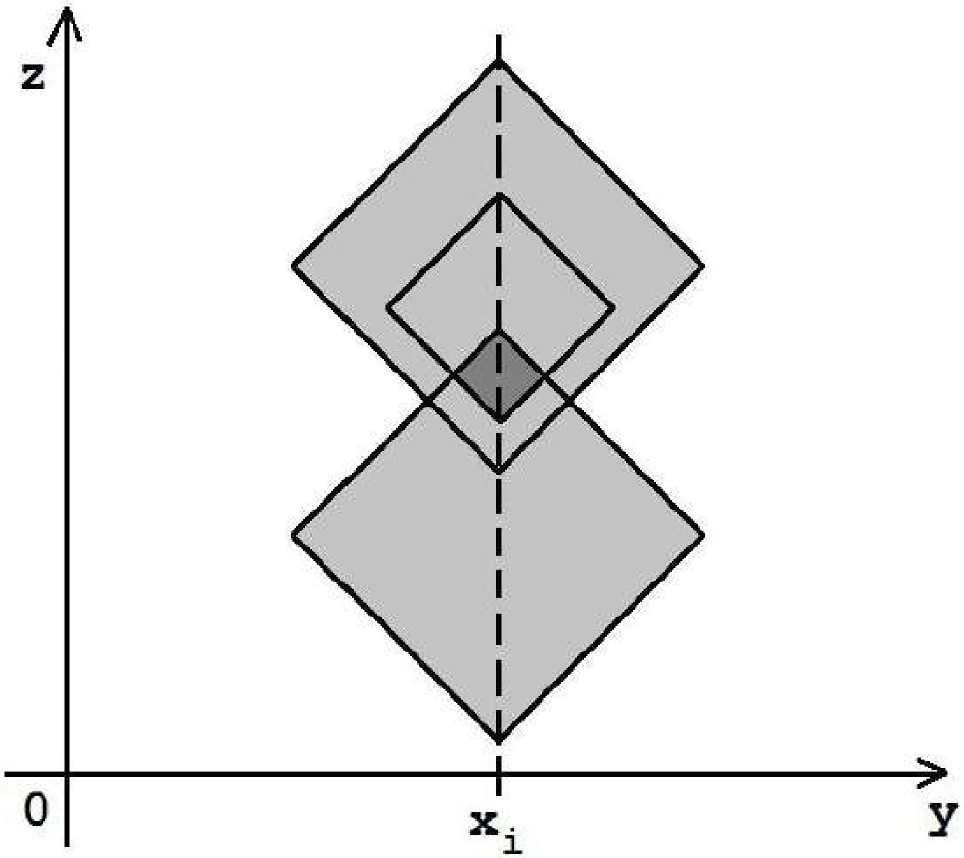
Релаксация к непрерывному множеству возможных решений



Инверсия задачи, геометрическая интерпретация



Дальнейшие оптимизации



Итоговый результат

- Наивное решение $O(n^3)$
- Основная лемма, переформулировка задачи
- Бинарный поиск по ответу
- Сильно-полиномиальное решение $O(n^2 \log n)$
- **Оптимизации с помощью структур данных $O(n \log d)$ – слабо-полиномиальное решение**

Литература и использования

- Faster Algorithms for Diameter-Optimally Augmenting Paths and Trees, Ulrike Grosse, Joachim Gudmundson, Christian Knauer, Michiel Smid, Fabian Stehn, ICALP 2015. Решили для $c = 0$ за $O(n^2 \log n)$
- Задача shortcut IOI 2016