

Математическое и программное обеспечение  
интерактивной системы обучения с  
автоматической генерацией задач и  
специализированными алгоритмами  
конструирования дерева решения

*Турунтаев И.С., аспирант 1 г.о.,  
научный руководитель:  
проф., д.ф.-м.н. Данилов В.Г.*

Москва 2015

# Обучение на ранних стадиях

- ◆ Играет ключевую роль: без надлежащего усвоения этого материала едва ли возможно эффективное дальнейшее обучение
- ◆ Происходит усвоение базовых правил и методов изучаемой дисциплины
- ◆ Теоретический материал закрепляется на большом количестве тренировочных задач
- ◆ Традиционно тренировочные задачи поставляются специализированной литературой и непосредственно преподавателем

# Проблемы традиционного подхода

- ◆ Невозможно учесть индивидуальные особенности каждого студента
- ◆ Слишком много времени на механическую проверку выполнения (наличия и качества)
- ◆ Практически невозможно сформулировать (уникальные) индивидуальные задания
- ◆ Недостаток информации для выявления ошибки (самостоятельный контроль)

- ◆ Всякая задача обладает постановкой, решением и ответом
- ◆ Схожие (решаемые одним алгоритмом) задачи обладают схожими условиями, решениями и формой ответов
- ◆ Конкретные примеры: важно не только знание правил, но и умение различить их в реальных задачах

# Понятие типовой задачи

$$T = \{(p(a_1, \dots, a_n), s(a_1, \dots, a_n), r(a_1, \dots, a_n)), a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

- ◆  $p$  — схема построения условия задачи
- ◆  $s$  — схема построения решения задачи
- ◆  $r$  — схема построения ответа задачи
- ◆  $a_1, \dots, a_n$  — динамические параметры задачи

Рандомизация по множествам изменения динамических параметров позволяет получить случайную задачу и заданного класса. Количество получаемых задач напрямую зависит от мощностей множеств  $A_1, \dots, A_n$ .

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})}.$$

$$860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$861. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$862. y = \cos 2x - 2 \sin x.$$

$$863. y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$864. y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx. \quad 866. y = \sin[\sin(\sin x)].$$

$$867. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}. \quad 868. y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}. \quad 870. y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

Демидович,  
«Сборник задач и упражнений  
по математическому анализу»,  
Отдел II. Дифференциальное  
исчисление функций одной  
переменной;

§1. Производная явной функции.

Весь этот набор (и гораздо больше) может  
быть получен «в две строчки»

```
y = RandomElementaryFunction(x, max_depth=5)  
answer = diff(y, x)
```

## Реализация целей...

- ◆ Формализация понятия типовой задачи
- ◆ Предоставить способ описания типовых задач
- ◆ Автоматическая генерация конкретных задач
- ◆ Автоматическая проверка ответов

## ...позволяет решить проблемы

- ◆ Индивидуальный объем решаемых задач
- ◆ Автоматический контроль
- ◆ Высокая степень персонализации заданий
- ◆ Задача считается решенной лишь в случае получения правильного ответа сразу

- Для описания типовых задач разрабатывается специальный язык — SmallTask. Преследуются цели обеспечения необходимой описательной мощности и возможности быстрого преобразования любого выражения в читаемый вид.
- Описание задачи включает текст с html-разметкой и вставками на языке SmallTask. Интерфейс составления задач требует серьезных доработок.
- Для организации вычислений используется система компьютерной алгебры SymPy. Выбор обусловлен языком системы и простотой интеграции.

**Head**

```
a = Random(1,20,0.3)
b = Random(1, 20, 0.3)
ax = a * x
bx = b * x
func = sin(ax)/(bx)
lim = limit(func, x, 0)
c = b / a
```

**Problem**

<b>Вычислите предел:</b><br>
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1.6 \cdot x)}{(11.2 \cdot x)}$

**Solution**

Произведем замену переменной:  
 $1.6 \cdot x = t$   
Тогда:  $\frac{\sin(1.6 \cdot x)}{(11.2 \cdot x)} = \frac{\sin t}{ct}$ , где  $c = \frac{11.2}{1.6}$ .  
Константу можно вынести за знак предела. Прделавав это, получим:  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(1.6 \cdot x)}{(11.2 \cdot x)} \right) = \left( \frac{1}{11.2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)$ . Оставшийся предел — это первый замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Окончательно:  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(1.6 \cdot x)}{(11.2 \cdot x)} \right) = \left( \frac{11.2}{1.6} \right)^{-1} = 0.142857142857143$

**Answer**  
0.142857142857143

## Problem

```
{$!  
a = Random(1,20,0.3)  
b = Random(1, 20, 0.3)  
ax = a * x  
bx = b * x  
func = sin(ax)/(bx)  
lim = limit(func, x, 0)  
c = b / a  
$}  
<b>  
Вычислите предел:  
</b><br>  
\( {$ lim $} \)
```

## Solution

Произведем замену переменной:<br>  
{\$ax == t\$}<br>

Тогда: {\$ func == sin(t) / (c\*t) \$}.<br>

Константу можно вынести за знак  
предела. Проделав это,  
получим:<br>

```
{$ lim == (1 / c) * limit(sin(x)/x, x, 0)  
$}.<br>
```

Оставшийся предел — это первый  
замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Окончательно:<br>

```
\( {$ lim == c^(-1) $} = \) {$= lim $}
```

# Основные проблемы

- ◆ Требуется описывать ход решения и ответ
- ◆ Интерфейс должен давать возможность полностью избегать взаимодействия с языком описания задач
- ◆ Сравнение ответов

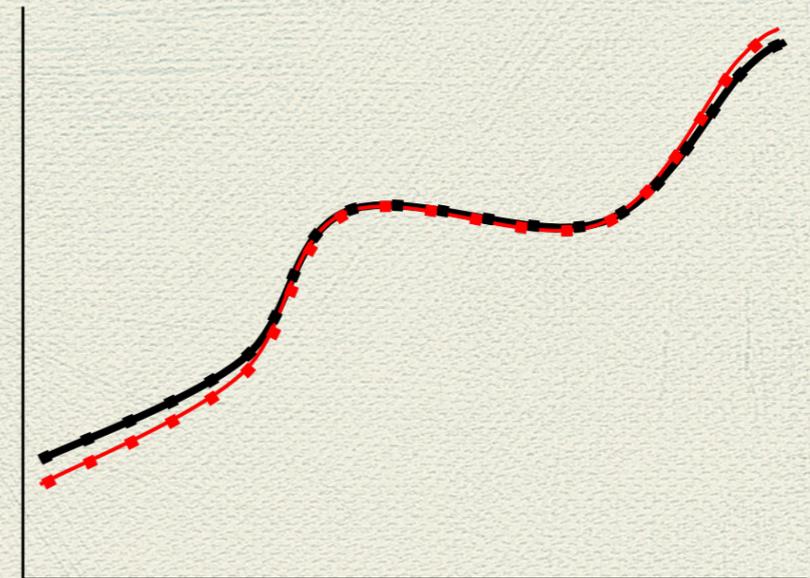
- ◆ Для некоторого класса задач представляется возможным составить алгоритм построения хода решения. Возможные пути
  - ◆ алгоритмы упрощения выражений, используемые в CAS
  - ◆ алгоритмы автоматизированного построения логического вывода
- ◆ В ходе решения естественным образом возникают связи с другими задачами, входящими в решение данной на правах подзадач
- ◆ Возникает проблема единообразия описания типовых задач: описания будут различны для задач, требующих и не требующих описания решения.

# Проблема сравнения ответов

- ◆ Автоматическая проверка правильности пользовательского ответа — ключевое условие системы.
- ◆ Проблема проверки ответа есть проблема выяснения семантической эквивалентности формул.
  - ◆ Пример: формулы  $2^x$  и  $e^{x \cdot \ln(2)}$  являются синтаксически разными, но семантически эквивалентны.
- ◆ Известно, что для формул, допускающих осциллирующие функции, такой алгоритм построить в общем случае нельзя (Richardson's Theorem).
- ◆ Для некоторых классов формул известны алгоритмы сравнения, основанные на приведении к канонической или нормальной формам. Реализовано в любой CAS.

- ◆ Решение проблемы сравнения ответов играет важнейшую роль в рамках данной системы.
- ◆ Для любой функции легко «изобрести» другую, которая будет мало от нее отличаться

- ◆ локальное переопределение
- ◆ аппроксимация



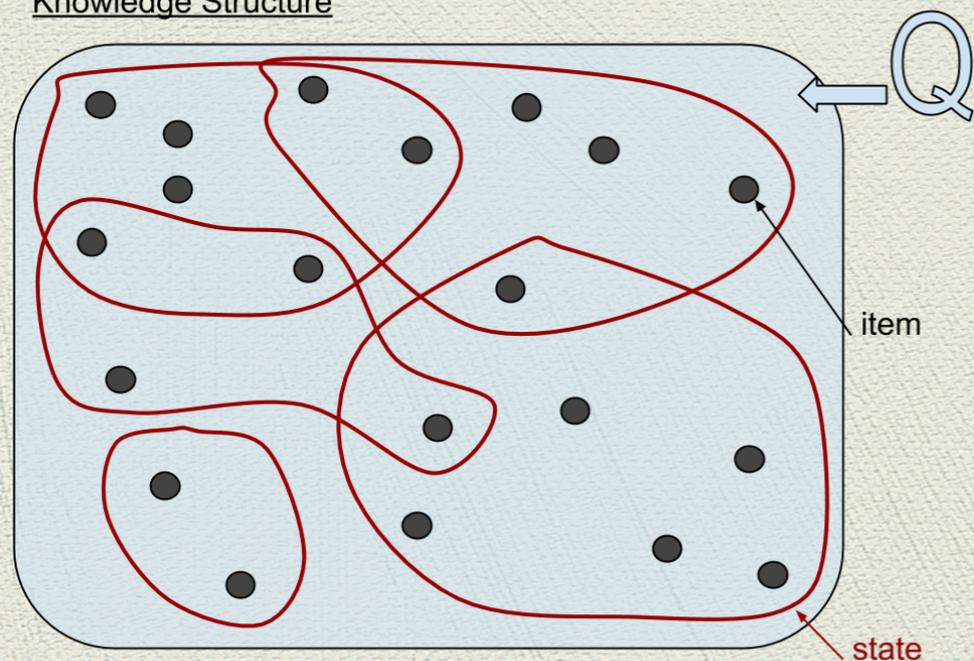
- ◆ Однако, в контексте вопроса проверки ответа, маловероятно появление таких двух функций
- ◆ Требуется установить критерий сравнения результатов.

- ◆ Проблема сравнения ответов сводится к Constant Problem.
- ◆ Частично эта проблема решается в различных CAS.
- ◆ Возможная идея решения проблемы сравнения двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — через оценку их разности на некотором наборе случайных точек.
  - ◆ если  $f_1(x)-f_2(x)$  имеет лишь дискретное множество нулей, то вероятность «попасть» в ноль равна 0 (в непрерывном случае)
  - ◆ наличие непрерывного множества нулей кажется сомнительным в рассматриваемом контексте
- ◆ Также, возможно, разумно оценивать пределы отношений  $f_1(x)/f_2(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  (для непрерывных функций)
- ◆ Требуется построить алгоритм сравнения двух функций и строго обосновать его корректность.

# Learning Spaces

- ◆ Формализация области знаний и познаний студента в данной области
- ◆ Некоторая область знаний представляется как конечное множество концепций.
- ◆ Алгоритмы по вычислению состояния обучающегося и предложению новых задач к изучению

Knowledge Structure



- ◆  $(Q, \mathcal{K})$  — learning space
- ◆  $Q$  — finite set
- ◆  $\mathcal{K} \subset 2^Q$ , s.t.  $\emptyset \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{K}$
- ◆  $\mathcal{K}$  — closed under union, well-graded

# Организация теоретического материала

- ◆ Среди дальнейших задач — предоставление справочного и теоретического материала
- ◆ Набор спецификаций и стандартов SCORM для систем дистанционного обучения
- ◆ Основные требования:
  - ◆ инструменты для пополнения материалов
  - ◆ поддержка мультимедиа для обеспечения максимальной информативности
  - ◆ обеспечение связи задач и теоретического материала

# Дальнейшие действия

- ◆ На данный момент на уровне прототипа разработана система с возможностью описания задач и их предложения студентам
- ◆ Необходимо окончательно решить вопрос о сравнении ответов
- ◆ Разработка алгоритма автоматического построения хода решения
- ◆ Адаптация идей Learning Spaces
- ◆ Покрытие курса математического анализа, распространение на другие дисциплины
- ◆ Разработка системы описания и представления теоретического материала, связь с практическими задачами

Спасибо за внимание!