# Факультет математики НИУ ВШЭ
# Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

6 октября 2014 г.
(продолжительность экзамена 4 часа)

1. Сколько, с точностью до изоморфизма, существует абелевых групп $A$ со следующим свойством: $A$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, и фактор $A$ по этой подгруппе также изоморфен $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$?

2. Функция $f$ определена так: $f(x) = e^{-x}$, если $x \in [-1; 1]$, $f(x) = 0$, если $|x| > 1$. Обозначим через $\hat{f}$ ее преобразование Фурье.

   а) Будет ли функция $\hat{f}$ непрерывна?

   б) Является ли интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)dt$ абсолютно сходящимся?

   **Напоминание 1** *Преобразованием Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функция $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная как*

   $$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

3. Обозначим через $X \subset \mathbb{R}^2$ объединение отрезков $[(-1; 0); (1; 0)]$ и $[(0; -1); (0; 1)]$, а через $Y \subset \mathbb{R}^2$ — объединение отрезков $[(-1; -1); (-1; 1)]$, $[(1; -1); (1; 1)]$ и $[(-1; 0); (1; 0)]$. Гомеоморфны ли $X$ и $Y$?

4. Пусть $\mathrm{Mat}_n$ – векторное пространство матриц $n \times n$. Для каждой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n$ определим линейный оператор $\mathrm{ad}A\colon \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$ как

   $$\mathrm{ad}A(B) = AB - BA.$$

   Выразите собственные значения $\mathrm{ad}A$ через собственные значения $A$.

   Устное добавление: разрешалось считать, что матрица над $\mathbb{C}$ и диагонализуема.

5. Существует ли мероморфная функция $f$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая функциональному уравнению $f(z) + e^{f(z)} = \frac{1}{z}$? Строго обоснуйте ответ.

6. Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен, для которого $P(0)$ нечётно. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – корень уравнения $P(x) = 0$, $\alpha > 1$. Докажите, что $\log_2(\alpha)$ иррационально.