

Правительство Российской Федерации
Государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального
образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор НИУ-ВШЭ

_____ С.Ю.Рощин

«___»_____ 2015 г.

Одобрена на заседании Учёного совета факультета математики

«___»_____ 2015 г.

Декан факультета математики, д.ф.-м.н.

_____ В.А. Тиморин

ПРОГРАММА
кандидатского экзамена по математике

Общая часть

Москва, 2015 г.

На экзамене кандидатского минимума по математике аспиранты должны продемонстрировать знание следующих тем:

- (1) Теория множеств: мощность, теорема Кантора-Бернштейна, порядковые числа, принцип трансфинитной индукции, аксиома выбора.
- (2) Логика: логика высказываний, исчисление предикатов, понятие алгоритма, вычислимость по Тьюрингу, примеры неразрешимых алгоритмических проблем, классы P и NP, примеры NP-полных задач.
- (3) Теория вероятностей: случайные величины и их распределения, математическое ожидание, дисперсия, независимость и условные вероятности, закон больших чисел, центральная предельная теорема.
- (4) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, свободные группы, задание групп образующими и соотношениями, простые группы, разрешимые группы. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.
- (5) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.
- (6) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность, полилинейные формы, симметрическая и внешняя степень векторного пространства.
- (7) Теория полей: поля, характеристика, структура и автоморфизмы конечных полей, конечные, алгебраические, сепарабельные расширения, основная теорема теории Галуа.
- (8) Основы теории чисел: квадратичный закон взаимности, приближение вещественных чисел рациональными дробями, цепные дроби, теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными, трансцендентность числа e .
- (9) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.
- (10) Общая топология: топологические пространства, компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра.
- (11) Гомотопическая и алгебраическая топология: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения, клеточные разбиения, группы гомологий и когомологий, двойственность Пуанкаре.
- (12) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^n в R^m , производная сложной функции, ряд Тейлора, теорема о неявной функции, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(13) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(14) Нормированные векторные пространства, гильбертовы пространства. Пространства L_1 и L_2 . Ряд Фурье, теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы функций в L_2 , условия Дини сходимости ряда Фурье. Преобразование Фурье, его основные свойства.

(15) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

(16) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(17) Обыкновенные дифференциальные уравнения: задача Коши, теорема существования и единственности. Решение уравнений методом разделения переменных. Линейные уравнения и системы. Устойчивость решений.

Литература.

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания)

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания)

З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, Теория чисел. М: Наука 1985

Б.Л. Ван дер Варден, Алгебра. М.: Наука, 1976

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Н. К. Верещагин, А. Шень, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. Часть 2. Языки и исчисления. Часть 3. Вычислимые функции. М: МЦНМО, 2002. <http://www.mccme.ru/free-books/>

Э.Б. Винберг, Курс алгебры. М: Факториал 1999

Э. Б. Винберг, Линейные представления групп. М.: Наука 1985

О.Я. Виро и др., Элементарная топология. М: МЦНМО 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

Э. Мендельсон Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.

И.Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

А.Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007

А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии. М: Наука, 1989

Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Мир, 1970.