

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи
УДК 512.772

Бычков Борис Сергеевич

Стратификация пространств функций на комплексных кривых

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
С. К. Ландо

Москва — 2015

Содержание

Введение	5
1 Пространство Гурвица	18
1.1 Пространства Гурвица и их стратификация	18
1.2 Задача Гурвица	21
1.3 Компактификации пространств Гурвица	23
1.3.1 Конусы главных частей	24
1.3.2 Допустимые накрытия	26
2 Детские рисунки Гротендика	28
2.1 Функции и пары Белого	28
2.2 Шестиреберные рисунки рода три с единственной вершиной	29
2.2.1 Морфизм факторизации	29
2.2.2 Перечисление детских рисунков	31
2.2.3 Детский рисунок с Z_{12} -симметрией	34
2.2.4 Детские рисунки с Z_3 -симметрией	35
2.2.5 Пары Белого детских рисунков с Z_3 -симметрией	39
2.2.6 Детские рисунки с Z_2 -симметрией	41
2.3 Накрытия с четырьмя точками ветвления	51
2.3.1 Действие группы кос Гурвица	51
2.3.2 Мегакарты	52
2.3.3 Описание алгоритма	54
2.3.4 Результаты вычислений	55
3 Обобщенные числа Гурвица	60
3.1 Разложения перестановки в произведение перестановок	60
3.1.1 Числа Буске-Мелу-Шеффера	60
3.1.2 Перестановки фиксированной вырожденности	62
3.1.3 Доказательства	63
3.2 Производящие ряды обобщенных чисел Гурвица	66
3.2.1 Производящий ряд чисел Буске-Мелу-Шеффера	66
3.2.2 Интегрируемые иерархии	68
3.2.3 Групповая алгебра CS_n	69
3.2.4 Операторы на центре групповой алгебры ZCS_n	72

Обозначения

$\nu \vdash n$ — разбиение натурального числа n на слагаемые: $n = \nu_1 + \dots + \nu_t$, ν_i , $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_t$ — части разбиения.

$t = l(\nu)$ — длина разбиения.

$|\nu| = n$.

μ_1, \dots, μ_r — также разбиения числа n , если не оговорено противное.

$1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$ — запись разбиения $\nu \vdash n$ в мультипликативной форме; $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$.

$k(\nu) = |\nu| - l(\nu)$ — вырожденность разбиения $\nu \vdash n$.

$[\mu_1, \dots, \mu_r]$ — набор разбиений, паспорт разветвленного накрытия.

$\mathcal{M}_{g;n}$ — пространство модулей комплексных кривых рода g с n отмеченными точками.

$\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ — компактификация Делиня–Мамфорда пространства модулей комплексных кривых рода g с n отмеченными точками.

$\mathcal{H}_{g;k_1, \dots, k_n}$ — пространство Гурвица мероморфных функций на комплексных кривых рода g с набором k_1, \dots, k_n кратностей прообразов критического значения ∞ .

$\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1, \dots, k_n}$ — пополненное пространство Гурвица.

$\sigma_{\mu_1; \dots; \mu_r}$ — страт дискриминанта пространства Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1, \dots, k_n}$, состоящий из функций, имеющих ветвления предписанных типов μ_1, \dots, μ_r над вырожденными критическими значениями.

$b_{g,\nu,r}$ — количество классов изоморфизма разветвленных накрытий двумерной сферы поверхностью рода g с r точками ветвления произвольных типов ветвления и выделенной точкой ветвления с данным типом ветвления $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_t\}$.

$b_{\sigma_0}(r)$ — количество разложений перестановки $\sigma_0 \in S_n$ в произведение r перестановок (некоторые из которых могут быть тождественными), удовлетворяющих следующим условиям:

- (а) группа, порожденная этим набором из r перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов;
- (б) соответствующее разветвленное накрытие имеет род 0.

s_ν — функция Шура разбиения ν .

\dim_ν — размерность неприводимого представления симметрической группы S_n , соответствующего разбиению ν числа n .

C_ν — множество перестановок циклического типа ν в группе S_n .

χ_ν — характер неприводимого представления симметрической группы S_n , соответствующего разбиению ν числа n .

$p_\nu = p_{\nu_1} \dots p_{\nu_t(\nu)}$ — параметры производящих функций.

$c(\omega)$ — содержание клетки ω диаграммы Юнга.

$\mathbb{K}G$ — групповая алгебра конечной группы G над полем \mathbb{K} .

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Пространства мероморфных (рациональных) функций на комплексных алгебраических кривых данного рода являются фундаментальным предметом изучения современной математики. Эти пространства называются пространствами Гурвица; их изучение было начато еще А. Гурвицем в конце XIX века. Они обладают комплексной структурой и разнообразными интересными топологическими и геометрическими свойствами.

Для того, чтобы задать конкретное пространство Гурвица, обычно фиксируют род кривых и степень рассматриваемых на этих кривых мероморфных функций. Также можно зафиксировать дополнительные данные, например, порядки полюсов функций, точные определения см. ниже. Общая функция в пространстве Гурвица имеет простые (морсовские) критические точки, а ее критические значения невырождены и попарно различны. Вырождения критических значений функций определяют стратификацию соответствующего пространства Гурвица.

В работе с разных точек зрения и разными методами исследуются страты пространств Гурвица. Основные результаты касаются стратов наибольшей коразмерности — нульмерных и одномерных, — и стратов наименьшей коразмерности — открытых стратов.

Страты наибольшей коразмерности состоят из функций с наименьшим возможным количеством критических значений, а именно, с 3 критическими значениями. Функции, образующие эти страты, называются *функциями Белого*. Они играют ключевую роль в современном понимании теории Галуа. Несмотря на важность функций Белого, их конкретное вычисление является технически очень сложной задачей, круг посчитанных примеров невелик, а общие методы вычисления неразвиты. Пара алгебраическая кривая и функция на ней с тремя критическими значениями называется *парой Белого*. А. Гротендик в своей программе [32] ввел понятие *детский рисунок* — это двумерная поверхность и граф, вложенный в нее так, что дополнение гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Прообраз отрезка, соединяющего два критических значения мероморфной функции, — это детский рисунок. В свою очередь, для каждого детского рисунка есть реализующая его пара Белого. Эта пара по сути дела единственна. Г. В. Белый в [9] показал, что на любой кривой, определенной над полем алгебраических чисел есть функция с тремя критическими значениями. Детские рисунки

ки связывают между собой алгебраическую геометрию, теорию чисел, теорию римановых поверхностей, теорию струн и др. Многие естественно возникающие задачи, связанные с детскими рисунками, оказываются достаточно трудными. Например, задачи связанные с орбитами действия группы Галуа. Задача построения пар Белого далека от своего полного решения, однако есть много частичных результатов в этой области: [3], [4], [7], [8], [23], [37], [42], [43]. Наши результаты состоят в вычислении пар Белого всех шестиреберных детских рисунков рода 3 с единственной вершиной и нетривиальной группой автоморфизмов.

В свою очередь, одномерные страты состоят из функций с 4 критическими значениями. Каждый такой страт распадается в объединение кривых, на каждой из которых задана функция Белого. Тем самым, одномерные страты в пространствах Гурвица дают конкретные примеры функций Белого, однако их явное вычисление также является трудной задачей. Следуя [47], мы называем детские рисунки, отвечающие функциям Белого на одномерных стратах, мегакартами. Наши результаты состоят в явном описании мегакарт для целого ряда конкретных одномерных стратов в пространствах Гурвица.

Страты максимальной размерности состоят из общих функций. Основным инструментом анализа геометрии таких стратов является отображение Ляшко–Лойенги, сопоставляющее каждой функции неупорядоченный набор ее критических значений. Степень отображения Ляшко–Лойенги это число Гурвица, и развитие способов подсчета этих чисел также является важной задачей.

Пусть μ_1, \dots, μ_r — разбиения числа d , k_1, \dots, k_n — еще одно разбиение: $k_1 + k_2 + \dots + k_n = d$. *Обобщенное число Гурвица* $h_{g;\mu_1, \dots, \mu_r; k_1, \dots, k_n}$ перечисляет разветвленные накрытия $X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ степени d поверхностью X рода g , такие что:

- точка $\infty \in \mathbb{C}P^1$ имеет ровно n различных пронумерованных прообразов кратностей k_1, \dots, k_n соответственно;
- существует нефиксированное число точек ветвления, которые в дальнейшем будут называться *простыми*, кратности прообразов которых образуют разбиения $1^{d-2}2^1$.
- существует ровно r пронумерованных непростых точек ветвления с кратностями прообразов, равными частям разбиений μ_1, \dots, μ_r ;

Количество m простых точек ветвления определяется по формуле

Римана–Гурвица:

$$2 - 2g = 2d - m - \sum_{i=1}^n (k_i - 1) - K(P),$$

где $K(P)$ — это сумма по всем r разбиениям μ_1, \dots, μ_r уменьшенных на единицу частей разбиений.

Как будет видно ниже, из основного текста диссертации, число $h_{g;\mu_1, \dots, \mu_r; k_1, \dots, k_n}$ также равно количеству разложений перестановки в произведение перестановок или количеству *созвездий* с определенными условиями.

В случае $g = r = 0$ обобщенные числа Гурвица называются просто *числами Гурвица* $h_{0;k_1, \dots, k_n}$.

Первая формула для чисел, перечисляющих разветвленные накрытия, принадлежит Гурвицу. Более ста лет назад в 1891 году в [34] им получена формула для чисел $h_{0;k_1, \dots, k_n}$:

$$h_{0;k_1, \dots, k_n} = \frac{(k_1 + \dots + k_n + d - 2)!}{|\text{Aut}(k_1, \dots, k_n)|} \prod_{i=1}^n \frac{k_i^{k_i}}{k_i!},$$

где $|\text{Aut}(k_1, \dots, k_n)|$ равно произведению факториалов совпадающих частей разбиения.

После этого, в целом, задача была забыта до работы Г. Вейля [46] 1931 года и А. Д. Медных [16], [40] 1980-90 годов. Всплеск интереса к ней случился совсем недавно — в конце XX, начале XXI века, в связи с обнаружением связей задачи Гурвица с геометрией пространства модулей комплексных кривых и теорией особенностей.

Коллективом авторов в работе [28] числа Гурвица $h_{g;k_1, \dots, k_n}$ были выражены через кратности ограничения так называемого отображения Ляшко–Лойенги на страты дискриминанта пополненного пространства Гурвица (здесь мы вынуждены отсылать за точными формулировками в раздел 1.1). Пополненное пространство Гурвица, в свою очередь, является конусом над пространством модулей кривых, таким образом была получена замкнутая формула для чисел $h_{g;k_1, \dots, k_n}$:

$$h_{g;k_1, \dots, k_n} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \right) \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \frac{1 - \lambda_1 + \dots + (-1)^g \lambda_g}{(1 - k_1 \psi_1) \cdot \dots \cdot (1 - k_n \psi_n)}.$$

Здесь λ_i — это классы Черна расслоения Ходжа голоморфных 1-форм над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, а ψ_i — это первый класс Черна расслоения \mathcal{L}_i над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, слой которого совпадает с кокасательным пространством к кривой в i -ой отмеченной точке.

В разделе 3.1, основываясь на геометрических соображениях, связанных с отображением Ляшко–Лойенги, мы получили новое доказательство замкнутой формулы для более общих чисел $b_{\sigma_0}(r)$.

Естественно, вследствие того, что замкнутые формулы для обобщенных чисел Гурвица и других чисел, перечисляющих разветвленные накрытия, получить не удавалось, появилось большое количество попыток написания разнообразных производящих рядов, перечисляющих разветвленные накрытия. С этой точки зрения большой интерес представляет то, что получающиеся производящие функции являются решениями интегрируемых иерархий. Явно такого рода утверждение впервые было доказано А. Окуньковым в 2000 году в [41]: он показал, что производящая функция для *двойных чисел Гурвица* (так мы называем числа Гурвица с двумя непростыми точками ветвления) является решением иерархии решетки Тоды.

После работы Окунькова появилось много естественных примеров комбинаторных объектов, производящие функции которых являются решениями интегрируемых иерархий.

В частности, производящим функциям, перечисляющим разветвленные накрытия, и связанным с ними интегрируемым иерархиям посвящены многочисленные работы Гульдена и Джексона, например, [31]. Их подход состоит в том, чтобы используя рекуррентные соотношения на числа Гурвица показать, что производящая функция, их перечисляющая, удовлетворяет соотношениям Плюккера и, тем самым, является τ -функцией.

В разделе 3.2 мы представляем новый метод получения производящей функции чисел Буске–Мелу–Шеффера $b_{g,\nu,r}$ и ее разложения по родам.

Цель работы

Цель работы состоит в описании стратов пространства Гурвица мероморфных функций на комплексных кривых и вычислении чисел Гурвица. В диссертации вычислены конкретные пары Белого, соответствующие стратам размерности 0, описаны конкретные страты размерности 1 — мегакарты — в пространствах Гурвица функций малых родов и малых степеней, получены новые формулы для чисел Гурвица и развиты новые методы их получения.

Основные результаты диссертации

1. Вычислены все пары Белого шестиреберных детских рисунков рода 3 с единственной вершиной и нетривиальной группой автоморфизмов.

2. Получены комбинаторные описания детских рисунков, отвечающих мегакартам функций небольших степеней на кривых малых родов.
3. Получено новое доказательство частного случая формулы для чисел Буске-Мелу–Шеффера.

Научная новизна

Результаты глав 2 и 3.1 являются новыми. В главе 3.2 получен новый эффективный метод получения производящих рядов, перечисляющих числа Гурвица.

Основные методы исследования

В диссертации используются различные комбинаторные, алгебраические и алгебро-геометрические методы.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут представлять интерес для специалистов в области алгебраической геометрии, комбинаторики, теории графов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- Семинар «Характеристические классы и теория пересечений» под руководством д.ф.-м.н. профессора С. К. Ландо и д.ф.-м.н. профессора М. Э. Казаряна (НИУ ВШЭ, 2011-2014 гг., неоднократно).
- Семинар «Графы на поверхностях и алгебраические кривые над конечными полями» под руководством д.ф.-м.н. профессора Г. Б. Шабата (мех-мат МГУ, 2008-2009 гг., неоднократно).
- Семинар «Маломерная математика» под руководством д.ф.-м.н. С. В. Дужина (Санкт-Петербург, 2014 г.)

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- Международная алгебраическая конференция посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, 28 мая - 3 июня 2008 г.)
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, апрель 2009 г.)

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, апрель 2011 г.)
- Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2013» (Новосибирск, 18-31 августа 2013 г.)
- Международная конференция «Примитивные формы и связанные объекты» (Япония, Токио, 10-14 февраля 2014 г.)
- Школа-конференция «Модули кривых» (США, Стони-Брук, 7-18 июля 2014 г.)
- Международная конференция «Вложенные графы» (Санкт-Петербург, 27-31 октября 2014 г.)
- Школа-конференция «Неделя молодых ученых» (Франция, Марсель, 8-14 февраля 2015 г.)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора (4 из которых входят в перечень ВАК), список которых приведен в конце введения.

Структура диссертации

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на разделы и параграфы. Полный объем диссертации — 79 страниц, библиография включает 47 наименований.

Краткое содержание работы

Введение к диссертации состоит из обзора литературы и краткого обзора текущего положения исследований тем, затронутых в диссертации.

Содержание главы 1

В первой главе определяются пространства Гурвица и их стратификация. Формулируется задача Гурвица, описываются известные компактификации пространств Гурвица.

Определение 1. Рассмотрим пространство мероморфных функций $X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на кривых рода g , у которых кратности прообразов точки ∞ равны k_1, \dots, k_n , а конечные критические значения простые. Множество таких функций образует пространство комплексной размерности

$k_1 + \dots + k_n + n + 2g - 2$. Мы можем пронумеровать полюса (прообразы точки ∞) $n!$ способами, что определяет накрытие кратности $n!$ над пространством мероморфных функций. На тотальном пространстве этого накрытия действует аддитивная группа \mathbb{C} , прибавлением к функции константы. Выбором этой константы можно добиться того, что сумма конечных критических значений функции будет равняться нулю, поэтому пространство орбит отождествляется с пространством мероморфных функций с нулевой суммой конечных критических значений. Это пространство мы будем обозначать через $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ и называть *пространством Гурвица*.

Определение 2. Через $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ мы будем обозначать пополнение пространства $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ состоящее из стабильных мероморфных функций на подальных кривых рода g с полюсами порядков k_1, \dots, k_n . Его граница $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \setminus \mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ состоит из стабильных функций на, быть может, особых кривых, единственные допустимые особенности которых — это точки простого двойного самопересечения.

Естественная проекция $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n} \rightarrow \mathcal{M}_{g;n}$ продолжается до проекции $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Послойная проективизация $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ является компактным комплексным орбиобразом.

По формуле Римана–Гурвица общая мероморфная функция из пространства $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ имеет $k_1 + \dots + k_n + n + 2g - 2$ невырожденных критических значения — их количество равно размерности пространства. Функции с меньшим количеством критических значений в образе образуют *дискриминант* в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$.

Определение 3. Замыкание в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ множества функций, имеющих ветвления предписанного типа будем обозначать через $\sigma_{\mu_1;\dots;\mu_r}$, где индекс состоит из набора разбиений кратностей прообразов над вырожденными критическими значениями. Эти подмногообразия называются *стратами дискриминанта*.

Содержание главы 2

Мероморфных функций с одним критическим значением не бывает, а мероморфные функции с двумя критическими значениями исчерпываются функциями $z^n: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Раздел 2.1 посвящен мероморфным функциям на кривых рода g с не более чем тремя критическими значениями. Такие функции называются *функциями Белого* и образуют страты размерности 0 в пространствах Гурвица.

Определение 4. Пара Белого — это пара (X, f) , состоящая из алгебраической кривой X и функции Белого $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Определение 5. Вложенный граф, вершины которого окрашены в два цвета так, что каждое ребро соединяет вершины противоположных цветов, называется *гиперкартой*.

Выбором координаты на прямой-образе можно добиться того, чтобы критические значения функции Белого имели координаты $0, 1$ и ∞ . При таком выборе прообраз $f^{-1}([0, 1])$ отрезка $[0, 1]$ задает гиперкарту на кривой X — прообразы точки 0 служат белыми вершинами, прообразы точки 1 — черными, а ребра являются замыканиями компонент связности прообраза $f^{-1}((0, 1))$ открытого интервала $(0, 1)$. Следуя [32], гиперкарту как представление пары Белого будем называть *детским рисунком*.

Во второй главе вычислены пары Белого всех шестиреберных детских рисунков с нетривиальной группой автоморфизмов рода 3 с единственной вершиной.

Теорема 6. Пара Белого детского рисунка с симметрией порядка 12 это функция Белого $f = x^6$ на кривой $y^2 = x(x^6 - 1)$.

Теорема 7. Все пары Белого детских рисунков рода 3 с 6 ребрами, группа автоморфизмов которых имеет порядок 3 , это:

1. функция Белого

$$f = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} x^2,$$

на плоской кривой

$$z^6 + z^3 x^2 (3 + \sqrt{3}) - z^3 x (1 + \sqrt{3}) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2),$$

записанной в координатах $(x : 1 : z)$.

2. функция Белого

$$f = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} x^2,$$

на плоской кривой

$$z^6 + z^3 x^2 (3 - \sqrt{3}) - z^3 x (1 - \sqrt{3}) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2),$$

записанной в координатах $(x : 1 : z)$.

Пары Белого детских рисунков с симметрией порядка 2 описаны в следующей теореме:

Теорема 8. *Все пары Белого детских рисунков рода 3 с 6 ребрами, группа автоморфизмов которых имеет порядок 2, это:*

1. *Функция Белого*

$$f = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right)$$

на кривой, являющейся прообразом гиперэллиптической кривой

$$y^2 = (z + 1)(z^3 - 3z^2 - 4)$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = z - 3.$$

2. *Ещё три пары Белого — это выраженная той же формулой функция Белого на кривой, являющейся прообразом гиперэллиптической кривой*

$$y^2 = (z + 1)(z^3 - 3z^2 - 4)$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = u_i, \quad i = 2, 3, 4; \quad u_{2,3,4} = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha),$$

где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$.

3. *Четыре пары Белого с функцией*

$$f = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y$$

на кривой, являющейся прообразом гиперэллиптической кривой

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60,$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = \left(\pm y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4} \right) (z - \alpha),$$

где $5\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$.

4. *Две пары Белого с функцией*

$$f = z^3$$

на кривой, являющейся прообразом гиперэллиптической кривой

$$y^2 = \frac{z}{3}(z^2 + z + 1),$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = (y + z)(z - 1);$$

и на кривой, являющейся прообразом гиперэллиптической кривой

$$y^2 = -z(z^2 + z + 1),$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = (y + z)(z - 1).$$

Раздел 2.2 посвящен стратам размерности 1 в пространстве Гурвица.

Определение 9. Фундаментальная группа пространства конфигураций из k попарно различных точек на $\mathbb{C}P^1$ называется *группой кос Гурвица* и обозначается \mathcal{H}_k .

Группа кос Гурвица \mathcal{H}_k имеет стандартный набор образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$: образующая σ_i соответствует элементарной положительной косе, меняющей местами i -ую и $(i + 1)$ -ую точки.

Определение 10. Последовательность перестановок $[g_1, \dots, g_r]$, $g_i \in S_n$, такая, что порожденная ими подгруппа $\langle g_1, \dots, g_r \rangle \subset S_n$ транзитивно действует на множестве из n элементов и такая, что $g_1 \cdot \dots \cdot g_r = \text{id}$ называется *r -созвездием*. Набор $[\mu_1, \dots, \mu_r]$ разбиений числа n , состоящий из цикловых структур μ_i перестановок g_i , называется *паспортом* созвездия.

Каждой гиперкарте естественно сопоставляется 3-созвездие:

- множество, на котором действует группа, это множество ребер гиперкарты;
- перестановка g_1 поворачивает ребра вокруг вершин первого цвета;
- перестановка g_2 поворачивает ребра вокруг вершин второго цвета;
- перестановка g_3 переводит каждое ребро в следующее в соответствии с ориентации ребро той же грани, причем ребро считается принадлежащим данной грани, если при обходе этой грани в положительном направлении мы проходим ребро от вершины первого цвета к вершине второго цвета.

Наоборот, как нетрудно видеть, каждому 3-созвездию естественно сопоставляется гиперкарта, так что указанное соответствие взаимно-однозначно.

В свою очередь, мегакарты являются гиперкартами специального вида.

Определение 11. *Мегакарта* — это множество E , элементами которого являются классы изоморфизма 4-созвездий, а само оно является орбитой действия подгруппы \mathcal{P} группы \mathcal{H}_4 , $\mathcal{P} = \langle \Sigma, A, \Phi \rangle$, где $\Sigma = \sigma_1^2$, $A = \sigma_2^2$, $\Phi = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — стандартные образующие группы кос Гурвица \mathcal{H}_4 .

Оказывается [47], на каждой связной компоненте компактификации пространства пар $\{(S, y)\}$, где S — 4-созвездие с фиксированным паспортом, а точка $y \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, существует функция Белого. Кроме того, соответствующий детский рисунок однозначно определяется перестановками Σ, A и Φ .

Теорема 12. *Детский рисунок, соответствующий мегакартам при $g(C) \leq 2$ и $\deg(f) \leq 4$, имеет род 0.*

Теорема 13. *Всего существует 57 связных мегакарт с $g(C) = 2$ и $\deg(f) = 5$ при 16 различных паспортах и 21 связная мегакарта с $g(C) = 3$ и $\deg(f) = 5$ при 5 различных паспортах. Максимальное количество ребер среди соответствующих детских рисунков равно 40.*

Содержание главы 3

Третья глава посвящена изучению различных стратов в пространствах Гурвица, вычислению чисел Гурвица и производящих рядов для чисел Гурвица. Обозначим через $b_{\sigma_0}(r)$ количество разложений перестановки $\sigma_0 \in S_n$ в произведение r перестановок (некоторые из которых могут быть тождественными), удовлетворяющих следующим условиям:

- группа, порожденная этим набором из r перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов;
- соответствующее разветвленное накрытие имеет род 0.

Будем называть числа $b_{\sigma_0}(r)$ числами Буске-Мелу-Шеффера [24]. Через $b_n(r)$ обозначим число Буске-Мелу-Шеффера в случае, когда перестановка σ_0 — это полный цикл длины n .

В разделе 3.1 приведено новое доказательство формулы для чисел $b_n(r)$:

Теорема 14.

$$b_n(r) = \frac{1}{n} \binom{rn}{n-1}.$$

Доказательство теоремы 14 основано на формуле Гульдена и Джексона [30] о числе упорядоченных разложений циклической перестановки в произведение r перестановок фиксированных циклических типов и непосредственно использует геометрическую природу стратов пространства Гурвица. Нужно отметить, что это доказательство, с небольшими вычислительными усложнениями, может быть полностью реализовано с использованием формул для степеней ограничения отображения Ляшко–Лойенги на страты дискриминанта пространства Гурвица. Все это говорит о геометрической природе полученного доказательства и позволяет рассчитывать на его обобщения на случаи более глубоких вырождений функций и случаи положительных родов.

В разделе 3.2 исследуются производящие ряды для чисел Буске–Мелу–Шеффера. Развита метод эффективного получения производящего ряда для чисел Буске–Мелу–Шеффера и его разложения по родам. Доказано, что такие ряды являются решениями иерархии Кадомцева–Петвиашвили.

Я хочу поблагодарить моего учителя Сергея Александровича Дориченко, без участия которого, пожалуй, я бы не стал заниматься математикой. Георгия Борисовича Шабата, который был моим первым научным руководителем — на мех-мате МГУ. Соруководителя семинара «Характеристические классы и теория пересечений» на математическом факультете ВШЭ Максима Эдуардовича Казаряна. И, конечно, моего научного руководителя Сергея Константиновича Ландо, чье внимание и помощь в течение последних четырех лет трудно переоценить. Эту работу я хотел бы посвятить памяти моего отца.

Список публикаций по теме диссертации

1. Б. С. Бычков, Е. М. Епифанов, В. А. Дремов. *Вычисления пар Белого шестиреберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.13, В.6, С.137-148 (2007); 0,6 п. л. (вклад автора — 0,2 п. л.)
2. Б. С. Бычков, Е. М. Епифанов, В. А. Дремов. *Вычисления пар Белого шестиреберных рисунков рода 3 с группой автоморфизмов порядка 2*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.18, В.6, С.77-89 (2013); 0,6 п. л. (вклад автора — 0,3 п. л.)
3. Б. С. Бычков *Вычисление мегакарт*, *Сиб. Эл. Матем. Изв.*, Т.10, С. 170-179 (2013); 0,4 п. л.

4. Б. С. Бычков *О разложении циклической перестановки в произведение данного числа перестановок*, Функц. анализ и его прил., Т.49, В.2, С. 1-6 (2015); 0,3 п. л.

1 Пространство Гурвица

В этой главе мы дадим определение пространства Гурвица и его возможных пополнений, сформулируем возникающие при этом и интересующие нас, задачи. В разделе 1.1 описана компактификация Делиня–Мамфорда пространства модулей комплексных кривых рода g с n отмеченными точками, определено пространство Гурвица и его стратификация. В разделе 1.2 описана связь задач перечисления разветвленных накрытия с задачами перечисления разложения перестановки в произведение перестановок. В разделе 1.3 приведены известные компактификации пространств Гурвица.

1.1 Пространства Гурвица и их стратификация

Главным действующим лицом наших исследований служит пространство мероморфных функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на алгебраической кривой X рода g или, другими словами, пространство разветвленных накрытий $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ двумерной компактной ориентированной поверхностью X рода g двумерную сферу. Пусть f — мероморфная функция степени d , тогда кратности прообразов каждого критического значения функции f определяют разбиения числа d . Критическое значение называется *простым* или *невыврожденным*, если разбиение принимает вид $1^{d-2}2^1$. Приступим к рассмотрению случая, когда все, кроме одного, критические значения функции f — простые.

Определение 1.1. Пусть k_1, \dots, k_n — кратности прообразов над точкой ∞ (мы будем называть эти прообразы *полюсами*) мероморфной функции на кривой рода g и остальные критические значения простые. Множество таких функций образует пространство комплексной размерности $k_1 + \dots + k_n + n + 2g - 2$. Мы можем пронумеровать полюса $n!$ способами, что определяет накрытие кратности $n!$ над пространством мероморфных функций. На тотальном пространстве этого накрытия действует аддитивная группа \mathbb{C} , прибавлением к функции константы. Выбором этой константы можно добиться того, что сумма конечных критических значений функции будет равняться нулю, поэтому пространство орбит отождествляется с пространством мероморфных функций с нулевой суммой конечных критических значений. Это пространство мы и будем обозначать через $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ и называть *пространством Гурвица*.

С топологической точки зрения каждая такая мероморфная функция степени $d = k_1 + \dots + k_n$ является разветвленным d -листным накрытием двумерной сферы поверхностью рода g .

Согласно [28] это пространство является гладким комплексным орбиобразом (при $g = 0$ или достаточно больших d даже комплексным многообразием).

Определение 1.2. Гладкое d -мерное *орбиобразе* — это хаусдорфово топологическое пространство M , наделенное атласом $\langle U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \phi_\alpha \rangle$, где

- семейство U_α — это открытое покрытие пространства M , дающее базис топологии на M ;
- семейство V_α представляет собой набор открытых подмножеств пространства \mathbb{C}^d ;
- каждое множество G_α — это конечная группа диффеоморфизмов подмножества V_α ;
- $\phi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ — это непрерывное отображение, слои которого являются орбитами действия группы G_α .

Атлас должен удовлетворять условию согласованности: если $U_\alpha \subset U_\beta$, то существует такой гомоморфизм $h_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$ и такое гладкое вложение $\phi_{\alpha\beta}: V_\alpha \rightarrow V_\beta$, что

- для всех $g \in G_\alpha$ и $x \in V_\alpha$: $\phi_{\alpha\beta}(gx) = h_{\alpha\beta}(g)\phi_{\alpha\beta}(x)$;
- для всех $x \in V_\alpha$: $\phi_\beta\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(x)$.

Две пары (топологическое пространство и атлас) эквивалентны, если существует гомоморфизм топологических пространств, согласованный с действиями групп, на соответствующих открытых областях комплексных пространств.

Пусть далее $\mathcal{M}_{g;n}$ — пространство модулей комплексных кривых рода g с n отмеченными точками, тогда пространство $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ расслоено над $\mathcal{M}_{g;n}$: каждой функции можно сопоставить кривую ее определения с n отмеченными точками.

$\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ — пополнение пространства $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ состоящее из *стабильных* мероморфных функций [28], [14] (подробнее о компактификации пространств Гурвица см. раздел 1.3). Его граница $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \setminus \mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ состоит из стабильных функций на особых кривых, единственные допустимые особенности которых — это точки простого двойного самопересечения.

Будем называть пару $(g;n)$ неотрицательных целых чисел *стабильной*, если либо $g = 0, n \geq 3$, либо $g \geq 1, n \geq 1$, либо $g \geq 2$.

Определение 1.3. Связная кривая с отмеченными точками называется *стабильной*, если

- ее единственными особенностями являются двойные точки;
- отмеченные точки неособы;
- группа автоморфизмов кривой, сохраняющая отмеченные точки, конечна.

Отметим, что гладкая кривая рода g с n отмеченными точками стабильная тогда и только тогда, когда пара $(g; n)$ стабильна.

Через $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ будем обозначать компактификацию Делиня–Мамфорда пространства модулей $\mathcal{M}_{g;n}$. Точками компактификации Делиня – Мамфорда служат классы биголоморфной эквивалентности стабильных кривых рода g с n отмеченными точками.

Теорема 1.4 ([26]). *Для каждой стабильной пары $(g; n)$ существует грубое пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ стабильных кривых рода g с n отмеченными точками. Это пространство модулей является комплексным орбиобразом. Подмногообразие $\mathcal{M}_{g;n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ плотно по Зарисскому. Компактифицированное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ обладает универсальной стабильной кривой $\overline{\mathcal{C}}_{g;n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, а отмеченные точки образуют n попарно непересекающихся сечений $\sigma_i: \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g;n}$.*

Проекция $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n} \rightarrow \mathcal{M}_{g;n}$ продолжается до проекции $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Послойная проецивизация $R\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ — является компактным комплексным орбиобразом. Ниже, допуская некоторую вольность речи, будем называть его подорбиобразия и другие орбиобразия — подмногообразиями и многообразиями.

В основном нас будут интересовать подмногообразия в пространстве Гурвица, состоящие из функций с вырожденными критическими значениями. Напомним, что критическое значение функции f степени d называется *невыврожденным*, если оно достигается в $d - 1$ различной точке, одна из которых является критической точкой кратности 2, а остальные $d - 2$ точки — некритические, и *вырожденным* в противном случае. По формуле Римана–Гурвица общая мероморфная функция степени d на кривой рода g имеет $2d + 2g - 2$ невырожденных критических значения. Функции с меньшим количеством критических значений в образе образуют *дискриминант* в пространстве $R\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$. Каждому критическому значению в образе можно сопоставить разбиение μ числа d , представляющее собой неупорядоченный набор кратностей прообразов данной точки.

Определение 1.5. Замыкание в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ множества функций, имеющих ветвления предписанного типа будем обозначать через $\sigma_{\mu_1;\dots;\mu_r}$, где индекс состоит из набора разбиений кратностей прообразов над вырожденными критическими значениями. Эти подмногообразия называются *стратами дискриминанта*.

1.2 Задача Гурвица

Отправной точкой наших исследований стратов дискриминанта пространства Гурвица служит задача перечисления классов изоморфизма разветвленных накрытий двумерной сферы.

Определение 1.6. Пусть C и X — два линейно связных топологических пространства, а $f : C \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Тройка (C, X, f) называется *неразветвленным накрытием* пространства X пространством C , если у каждой точки X найдется такая окрестность V , что прообраз $f^{-1}(V) \subset C$ гомеоморфен $V \times S$, где S — дискретное множество. Мощность множества S называется *степенью* накрытия. Накрытие степени n называется *n -листным*.

Пусть $f : C \rightarrow X$ — накрытие, $x_0 \in X$. Каждый непрерывный путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, концы которого совпадают с точкой x_0 , а внутренние точки отличны от x_0 , определяет перестановку множества $f^{-1}(x_0)$. Эта перестановка определяется следующим образом. Выкинув из полного прообраза $f^{-1}(\gamma) \subset C$ пути γ прообразы $f^{-1}(x_0)$ точки x_0 , мы разбиваем его на несвязное объединение ориентированных интервалов. Отображение множества $f^{-1}(x_0)$ в себя, переводящее начало каждого интервала в его конец, является перестановкой этого множества и называется *перестановкой монодромии* вдоль пути γ .

Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus Y$ — конечнолистное накрытие проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ с r выколотыми точками y_1, \dots, y_r , $Y = \{y_1, \dots, y_r\} \subset \mathbb{C}P^1$. Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ снабжена ориентацией, согласованной с комплексной структурой, то есть мы знаем, в каком направлении, положительном (против часовой стрелки) или отрицательном (по часовой стрелке) совершается обход вокруг какой-то из точек сферы. Пусть $y_0 \in \mathbb{C}P^1 \setminus Y$. Рассмотрим r ориентированных путей c_i из y_0 в y_i , $i = 1, \dots, r$ на $\mathbb{C}P^1$, таких, что они не пересекаются вне y_0 и входят в точку y_0 именно в таком порядке при обходе против часовой стрелки. Превратим каждый путь c_i в петлю $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus Y, y_0)$ следующим образом: петля γ_i идет вдоль c_i до тех пор, пока не попадет в малую окрестность точки y_i , затем она делает полный оборот вокруг y_i в положительном направлении

и, наконец, возвращается обратно в y_0 вдоль c_i . Перестановку монодромии вдоль пути γ_i будем обозначать через g_i . Набор петель γ_i , $i = 1, \dots, r$ вместе с начальной точкой y_0 будем называть *базовой звездой*.

Определение 1.7. *Цикловой структурой* перестановки $g \in S_n$ называется разбиение λ числа n , состоящее из длин независимых циклов перестановки g .

Определение 1.8. Группа $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$, порожденная перестановками g_i , называется *группой монодромии* накрытия.

Определение 1.9. Последовательность перестановок $[g_1, \dots, g_r]$, $g_i \in S_n$, такая, что группа $\langle g_1, \dots, g_r \rangle$ транзитивно действует на множестве из n элементов и такая, что $g_1 \cdot \dots \cdot g_r = \text{id}$ называется *r -созвездием*. Набор $[\mu_1, \dots, \mu_r]$ разбиений числа n , состоящий из цикловых структур μ_i перестановок g_i называется *паспортом* созвездия.

Два созвездия $[g_1, \dots, g_r]$ и $[g'_1, \dots, g'_r]$ *изоморфны*, если существует перестановка $h \in S_n$ такая, что $g'_i = h^{-1}g_i h$ при $i = 1, \dots, r$.

Утверждение 1.10. *Набор перестановок $[g_1, \dots, g_r]$, порождающий группу монодромии неразветвленного накрытия проколотой сферы, образует созвездие.*

Конструкция работает и в обратном направлении.

Утверждение 1.11. *Для любого созвездия существует соответствующее неразветвленное накрытие проколотой сферы.*

Нас интересуют классы изоморфизмов накрытий, поэтому сформулируем еще одно важное утверждение.

Утверждение 1.12. *При фиксированной последовательности образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus Y, y_0)$ два неразветвленных накрытия сферы $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие созвездия.*

Всякому конечнократному накрытию проколотой сферы однозначным образом сопоставляется разветвленное накрытие сферы без проколов. Для этого компактифицируем проколотую сферу $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$, добавив все недостающие точки y_1, \dots, y_r и для каждой точки y_i добавим в S столько точек, сколько независимых циклов в перестановке g_i . Новые точки в S и будут прообразами новых точек y_i с кратностями, равными длинам соответствующих циклов перестановок g_i .

Определение 1.13. Пусть C — компактная риманова поверхность. Непрерывное отображение $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ называется *разветвленным накрытием*, если существует такое конечное множество точек $Y = \{y_1, \dots, y_r\} \subset \mathbb{C}P^1$, что f получается из неразветвленного накрытия проколотой сферы $\mathbb{C}P^1 \setminus Y$ применением описанной выше конструкции.

Два разветвленных накрытия $f_1 : C_1 \rightarrow S^2$ и $f_2 : C_2 \rightarrow S^2$ двумерной сферы называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $h : C_1 \rightarrow C_2$ такой, что $f_1 = f_2 \cdot h$. Как обсуждалось выше, каждой точке ветвления в образе мы сопоставляем разбиение μ кратностей ее прообразов.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{u} & C_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & \mathbb{C}P^1 & \end{array}$$

Теорема 1.14 (теорема существования Римана). Пусть в $\mathbb{C}P^1$ зафиксирована некоторая базовая звезда, $[y_1, \dots, y_r] \in \mathbb{C}P^1$ — набор ее концевых точек, тогда для любого созвездия $[g_1, \dots, g_r]$, $g_i \in S_n$ существует риманова поверхность C и мероморфная функция $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ такая, что y_1, \dots, y_r — критические значения функции f , а g_1, \dots, g_r — соответствующие им перестановки монодромии. Разветвленное накрытие $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ единственно с точностью до изоморфизма.

Доказательство можно найти, например, в [12, с. 88].

Описанное соответствие связывает задачи перечисления разветвленных накрытий с задачами перечисления созвездий или, что тоже самое, задачами перечисления разложений перестановки в произведение перестановок.

1.3 Компактификации пространств Гурвица

В этом разделе мы подробно обсудим известные компактификации пространства Гурвица. Вначале рассмотрим пополнение Экедала–Ландо–Шапиро–Вайнштейна [28], оно будет иметь структуру конуса над компактификацией Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Затем мы рассмотрим пополнение Харриса и Мамфорда [20], в котором запрещено совпадение точек ветвления и пространство Гурвица оказывается накрытием пространства модулей рациональных кривых с отмеченными точками.

1.3.1 Конусы главных частей

Конус над алгебраическим многообразием (орбиобразием) M — это пучок градуированных \mathbb{C} -алгебр над M . *Рангом* конуса над многообразием называется размерность слоя. В терминах конусов очень удобно рассматривать пространства мероморфных функций: при фиксированных кривой и набора точек на ней, пространство мероморфных функций с полюсами заданных порядков в выбранных точках будет не векторным пространством, а конусом. Конус можно проективизировать — точками проективного конуса являются нетривиальные орбиты \mathbb{C}^* действия.

Далее, зафиксируем натуральное число k . Рассмотрим две мероморфные функции f_1 и f_2 , определенные в окрестности точки 0 и имеющие в этой точке полюс порядка k . Будем говорить, что эти функции имеют одинаковую главную часть в точке 0 , если их разность $f_1 - f_2$ не имеет полюса в нуле. *Главная часть* — это класс эквивалентности локальных функций по введенному отношению эквивалентности. Выберем в окрестности точки 0 координату x , тогда главную часть можно записать в виде:

$$\left(\frac{u}{x}\right)^k + a_1 \left(\frac{u}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1} \frac{u}{x}, \quad (1)$$

где $u \neq 0 \in \mathbb{C}^*$. Если $k > 1$, такое представление единственно с точностью до выбора k способами параметра u . Следовательно, пространство выражений вида (1) является k -кратным накрытием пространства главных частей. Группа монодромии этого накрытия есть группа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, ее действие на пространстве выражений вида (1) задается формулой:

$$(u, a_1, a_1, \dots, a_{k-1}) \mapsto (\varepsilon_k u, \varepsilon_k a_1, \varepsilon_k^2 a_2, \dots, \varepsilon_k^{k-1} a_{k-1}), \quad (2)$$

где ε — это корень k -ой степени из единицы.

Группа \mathbb{C}^* действует на пространстве главных частей умножением на константу. Это действие поднимается, с точностью до описанного выше действия $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, до действия \mathbb{C}^* на пространстве выражений вида (1):

$$\begin{aligned} \lambda \left(\left(\frac{u}{x}\right)^k + a_1 \left(\frac{u}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1} \frac{u}{x} \right) &= \\ &= \left(\frac{\nu u}{x}\right)^k + \nu a_1 \left(\frac{\nu u}{x}\right)^{k-1} + \dots + \nu^{k-1} a_{k-1} \frac{\nu u}{x}, \end{aligned}$$

где $\nu = \lambda^{1/k}$. Поэтому веса переменных u и a_i равны:

$$w(u) = \frac{1}{k}, \quad w(a_i) = \frac{i}{k}, \quad i = 1 \dots k - 1.$$

Мономы целого веса в алгебре многочленов от переменных u и a_i инварианты относительно действия (2). Веса координат задают на этой алгебре целочисленную градуировку. Соответствующий конус мы будем обозначать через P^k .

Открытое всюду плотное подмножество $u \neq 0$ в конусе P^k отвечает множеству главных частей с полюсами порядка k . Его дополнение $A^{k-1} \subset P^k$ является спектром факторалгебры $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ -инвариантных многочленов по модулю идеала многочленов, делящихся на u .

Старшие члены обобщенных частей порядка k находятся во взаимно однозначном соответствии с точками k -ой тензорной степени касательной прямой к \mathbb{C} в точке 0. А именно, пусть L — кокасательная прямая к \mathbb{C} в нуле. Представим точку $p \in P^k \setminus A^{k-1}$ в виде (1) и сопоставим ей главную часть $\frac{u}{x}$ с полюсом первого порядка в начале координат. Эта главная часть задает касательный вектор в точке 0 как следующий линейный функционал на L :

$$w \mapsto \operatorname{Res}_{x=0} \frac{u}{x} w.$$

k -ая тензорная степень построенного касательного вектора лежит в $(L^\vee)^{\otimes k}$. Обозначим этот элемент через $\phi(p) \in (L^\vee)^{\otimes k}$. Отображение ϕ продолжается на все P^k , если положить его равным нулю на A^{k-1} .

Лемма 1.15. *Значение отображения ϕ на главной части определяется старшим членом этой главной части. Кратность отображения ϕ на его множестве нулей A^{k-1} равна k .*

Второе утверждение леммы означает, что при ограничении отображения ϕ на кривую общего положения в P^k , трансверсально пересекающую A^{k-1} , ровно k прообразов отображения ϕ сливаются при стремлении образа к 0.

Доказательство. Координата на прямой задает естественную координату на L . При фиксированной координате x образ отображения ϕ есть u^k , т.е. как раз значение старшего члена главной части. Причем это многочлен веса 1, обращающийся в ноль на A^{k-1} . Посчитаем количество его прообразов, склеивающихся в общей точке $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^{k-1}$ при стремлении образа к 0. Это главные части с координатами (u, a_1, \dots, a_{k-1}) , $(u, \nu a_1, \dots, \nu^{k-1} a_{k-1})$, $(u, \nu^2 a_1, \dots, \nu^{2(k-1)} a_{k-1})$, \dots , $(u, \nu^{k-1} a_1, \dots, \nu^{(k-1)(k-1)} a_{k-1})$ различные в общей точке. ►

Построим конусы главных частей над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Рассмотрим стабильную кривую с n отмеченными точками: $(X; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Сопоставим i -ой отмеченной точке конус главных частей с полюсами порядка k_i в точке x_i и конус главных частей с нулевыми старшими

коэффициентами и полюсами порядка k_i в точке x_i . Объединение таких конусов дает конусы \mathcal{P}_i и \mathcal{A}_i над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Аналогично мы рассматриваем векторное расслоение $\tilde{\mathcal{A}}_i$ над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Обозначим

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_n; \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n; \quad \tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{A}}_n.$$

Описанный морфизм ϕ определяет n морфизмов конусов $\varphi_i: \mathcal{P}_i \rightarrow (\mathcal{L}_i^\vee)^{\otimes k_i}$. Прямая сумма этих морфизмов определяет морфизм $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1^\vee)^{\otimes k_1} \oplus \dots \oplus (\mathcal{L}_n^\vee)^{\otimes k_n}$.

Определение 1.16. Пусть \mathcal{P} — конус над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, образованный главными частями порядка k_i в i -ой отмеченной точке. Замыкание в \mathcal{P} множества наборов главных частей, соответствующих мероморфным функциям на гладких кривых, называется *пополненным пространством Гурвица* и обозначается $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$.

Пополненное пространство Гурвица имеет структуру подконуса в \mathcal{P} , так как инвариантно относительно умножения на комплексные числа и обладает естественной структурой комплексного орбиобразия.

1.3.2 Допустимые накрытия

В этом параграфе мы приводим описание пополнения пространства Гурвица допустимыми накрытиями, дальнейшее изложение следует [20] и [33].

Определение 1.17. Через $\mathcal{H}_{g;d}$ мы будем обозначать здесь пространство мероморфных функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ степени d на гладких кривых рода g , имеющих $b = 2d + 2g - 2$ различных критических значений p_1, \dots, p_b .

Ниже мы будем использовать термины накрытия и точки ветвления, вместо мероморфных функций и критических значений. Запретим точкам ветвления сливаться и дополним пространство Гурвица $\mathcal{H}_{g;d}$ накрытиями *стабильного предела* (B, p_1, \dots, p_b) , т.е. накрытиями стабильных кривых.

Пусть имеется семейство разветвленных накрытий $\{C_t \rightarrow \mathbb{C}P^1\}$, т.е. семейство гладких кривых C^* над проколотой сферой вместе с отображением $f: C^* \rightarrow \mathbb{C}P^1$ таким, что ограничение $f|_{C_t}$ имеет простое ветвление в точках $p_1(t), \dots, p_b(t)$. Дополним семейство накрытием стабильного предела (B, p_1, \dots, p_b) семейства $\{\mathbb{C}P^1; (p_1, \dots, p_b)\}$ с простым ветвлением над точками p_1, \dots, p_b .

Топологически довольно просто последить что происходит с различными точками $p_i(t)$, $i = 1, \dots, b$ при стремлении гладкой кривой $(\mathbb{C}P^1;$

$p_1(t), \dots, p_b(t)$) к стабильной кривой $(B; p_1, \dots, p_b)$. Предположим, что есть семейство разветвленных накрытий $C_t \rightarrow \mathbb{C}P^1$ слоев общего положения семейства гладких кривых. Добавим к нему следующее разветвленное накрытие $C_0 \rightarrow B$ специального слоя. Двойная точка специального слоя B стабильных кривых с b отмеченными точками появляется при стягивании петли, тогда прообраз этой петли в пространствах накрытий будет состоять из нескольких петель, каждая из которых стягивается в двойную точку кривой C_0 . Кривую C_0 можно описать явно.

Определение 1.18. Пусть $(B; p_1, \dots, p_b)$ — стабильная кривая рода 0 с b отмеченными точками и пусть q_1, \dots, q_k — двойные точки кривой B . *Допустимым накрытием* кривой B называются подалная кривая C и регулярное отображение $f: C \rightarrow B$ такие, что

- $f^{-1}(B_{reg}) = C_{reg}$, и ограничение отображения π на это открытое множество является неразветвленным накрытием за исключением простых ветвлений в точках p_i ;
- $f^{-1}(B_{sing}) = C_{sing}$, причем для каждой двойной точки q кривой B и каждой двойной точки r кривой C , лежащей над ней, две компоненты кривой C около точки r отображаются в компоненты кривой B около точки q с одним и тем же показателем ветвления.

Аналогично определяется семейство допустимых накрытий стабильных кривых рода 0 с b отмеченными точками.

Следующая теорема завершает наше изучение пополнения пространства $\mathcal{H}_{g;d}$ допустимыми накрытиями.

Теорема 1.19 ([33]). *Для допустимых накрытий существует грубое пространство модулей $\overline{\mathcal{H}}_{g;d}$ такое, что существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{g;d} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}_{g;d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{g;n} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{g;n} \end{array}$$

2 Детские рисунки Гротендика

В этой главе мы рассматриваем страты минимальных размерностей в пространствах Гурвица — мероморфные функции на кривых рода g с не более чем тремя критическими значениями (детские рисунки) и с не более чем четырьмя критическими значениями (мегакарты). В первом разделе мы вводим необходимые определения и обозначения, во втором разделе мы приводим вычисление пар Белого всех детских рисунков рода 3 с шестью ребрами, единственной вершиной и нетривиальной группой автоморфизмов, в третьем разделе мы изучаем топологические и комбинаторные свойства пространства мероморфных функций с не более чем четырьмя критическими значениями

2.1 Функции и пары Белого

Определение 2.1. Мероморфная функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ называется *функцией Белого*, если у нее не более трех критических значений.

В 1979 году Г.В. Белый доказал следующую замечательную теорему [9]:

Теорема 2.2. *Полная гладкая комплексная алгебраическая кривая определена над полем $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда на кривой существует функция Белого.*

Определение 2.3. *Пара Белого* — это пара (X, f) , состоящая из алгебраической кривой X и функции Белого f .

В дальнейшем мы будем считать, что множество критических значений функции Белого содержится в множестве $\{0, 1, \infty\}$.

Рассмотрим отрезок $[0; 1] \subset \mathbb{C}P^1$, покрасим точку 0 в черный цвет, 1 — в белый, и возьмем прообраз $f^{-1}([0; 1]) \subset X$. Черные вершины — прообразы нуля, белые — единицы, их валентности равны кратностям соответствующих критических точек. Каждая грань полученного вложенного графа содержит ровно один полюс, т.е. прообраз бесконечности. Заметим, что с перестановочной точки зрения мы имеем дело с 3-созвездием. Следуя [12] будем называть 3-созвездие *гиперкартой*. Приведем эквивалентное определение на языке вложенных графов:

Определение 2.4. Вложенный граф, вершины которого окрашены в два цвета так, что каждое ребро соединяет вершины различных цветов, называется *гиперкартой*.

Следуя [32], гиперкарту, понимаемую как представление пары Белого, будем называть *детским рисунком*.

В теории детских рисунков возникает множество интересных задач, связанных с орбитами действия группы Галуа поля определения функции Белого на множестве рисунков. Другой класс задач связан с явным вычислением пар Белого по представляющим их детским рисункам. С вычислительной точки зрения эта проблема далека от полного разрешения.

В следующем разделе приведено полное решение задачи нахождения пар Белого для симметричных шестиреберных детских рисунков рода три с единственной вершиной.

2.2 Шестиреберные рисунки рода три с единственной вершиной

2.2.1 Морфизм факторизации

Главным действующим лицом нескольких ближайших параграфов будут шестиреберные детские рисунки рода три с единственной вершиной. Они являются результатом ориентированной склейки правильных двенадцатиугольников. Здесь и далее под склейкой понимается отождествление пар сторон многоугольника. При этом, если каждой паре склеиваемых сторон приписать какую-нибудь букву (для разных пар выберем различные буквы), то каждой склейке будет соответствовать *гауссово слово*. Если зафиксировать начальную сторону и направление обхода (например, против хода часовой стрелки), то каждой склейке будет соответствовать единственное слово и разным склейкам будут соответствовать разные слова. В результате такого склеивания получается компактная ориентированная поверхность без края, см. [17]; вложенный граф получается как след от границы двенадцатиугольника, если при этом считать, что вершины многоугольника перейдут в черные вершины графа, а «середины сторон» — в белые, то граф будет двукрашенным. Количество различных склеек двенадцатиугольника равно 131, полный список склеек и соответствующих гауссовых слов приведен в [11].

Морфизмом v пар Белого (X_1, f_1) и (X_2, f_2) называется морфизм алгебраических кривых $v: X_1 \rightarrow X_2$ делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{v} & X_2 \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & \mathbb{C}P^1 &
 \end{array}$$

Рассмотрим фактор детского рисунка по его группе автоморфизмов. Полученный детский рисунок будем называть *факторрисунком*.

Поясним, почему в результате факторизации действительно получается детский рисунок. Для этого, исходя из определений, достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.5. *Для любого детского рисунка D и любой группы его автоморфизмов (не обязательно состоящей из всех автоморфизмов) существует такой морфизм $u : D \rightarrow D/G$, для которого выполняются следующие 3 условия:*

- 1) *для любого детского рисунка H и для любых морфизмов f, g из D/G в H из равенства $f \circ u = g \circ u$ следует $f = g$ (т.е. u — эпиморфизм);*
- 2) *для любого $g \in G$ выполняется равенство $u \circ g = u$ (т.е. морфизм u согласован с морфизмами группы)*
- 3) *для любого детского рисунка H и для любого морфизма $u' : D \rightarrow H$, удовлетворяющего условию 2), существует такой морфизм $u'' : D/G \rightarrow H$, что $u' = u'' \circ u$.*

Единственность морфизма u'' следует из пункта 1) (универсальность эпиморфизма u).

Доказательство.

Воспользуемся тем фактом (см. [21], теоремы 16.1.1 и 16.1.2), что категория трехкрашенных детских рисунков (мы дополнительно третьим цветом красим центры граней детского рисунка) эквивалентна категории однородных $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ множеств. Пусть при этой эквивалентности детскому рисунку D и его группе автоморфизмов G сопоставляются действие ϕ группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ на некотором множестве X , а также действие G на X . Каждый автоморфизм $g \in G$ детского рисунка D определяет биекцию множества X . Рассмотрим множество орбит X/G . По определению, автоморфизмы из G согласованы с действием ϕ , поэтому поэлементное применение ϕ определяет транзитивное действие на множестве X/G , при этом отображение факторизации $u : X \rightarrow X/G$ будет морфизмом $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ -действий. Покажем, что морфизм u действительно удовлетворяет условиям 1)-3).

- 1) следует из сюръективности отображения u .
- 2) выполнено по построению, так как под действием морфизмов из группы G элемент множества X переходит в элемент той же орбиты.

3) Так как из выполнения условия 2 для морфизма u' следует, что значения u' на всех элементах произвольной орбиты $t \in X/G$ должны совпадать, то можно определить $u''(t)$ как значение u' на любом элементе $x \in t \subset X$. Непосредственно проверяется, что так определенное отображение u'' действительно оказывается морфизмом, удовлетворяющим соотношению $u' = u''u$. ►

2.2.2 Перечисление детских рисунков

Перечислим все шестиреберные склейки рода 3 с единственной вершиной и нетривиальными группами автоморфизмов.

Если порядок группы автоморфизмов детского рисунка равен n , то на языке гауссовых слов это означает, что, с точностью до переименования букв, слово $\frac{12}{n}$ -периодично. То есть, если на местах i и j в слове стоят одинаковые буквы, то и на местах $((i + \frac{12}{n}) \bmod 12)$ и $((j + \frac{12}{n}) \bmod 12)$ стоят одинаковые буквы. (Здесь и далее места пронумерованы от 0 до 11, вычисления позиций в слове производятся по $\bmod 12$, так как длина слова равна 12). На языке склеек это означает, что склейка правильного двенадцатиугольника инвариантна относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$. Далее мы будем отождествлять группу автоморфизмов и циклическую группу соответствующего порядка и обозначать ее Z_n . Поскольку порядок группы автоморфизмов делит 12, порядок n может принимать значения 2, 3, 4, 6 и 12. Разберем эти возможности поочередно.

Пусть n — порядок группы автоморфизмов склейки.

Утверждение 2.6. *Если $n = 12$, то возможна только одна склейка с гауссовым словом $(a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f)$.*

Доказательство.

Если i, j ($i < j$) — места, на которых стоят одинаковые буквы, то на месте $j + (j - i) = 2j - i$ стоит такая же буква, то есть $2j - i \equiv i \Rightarrow j = i + 6$.

►

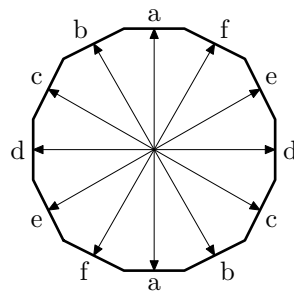


рис. 1

Утверждение 2.7. *Склеек с $n = 6$ и $n = 4$ нет.*

Доказательство.

Пусть $n = 6$ и буква a встречается в слове на i и j , ($i < j$) позициях. Предположим, что $j - i < 6$ (если $j - i = 6$ для всех букв, то $n = 12$). Если $j - i$ четно, то, поскольку слово 2-периодично, получим, что на месте $j + (j - i) \bmod 12$ тоже стоит буква a . Следовательно, $j - i$ нечетно, и в силу 2-периодичности получим, что в слове на каждой паре мест с номерами $(2n + i, 2n + j)$, $n = 0, \dots, 5$ стоят одинаковые буквы. При заданной разности $j - i$ это условие однозначно определяет склейку. Легко проверить, что в каждом из трех случаев $j - i = 1, 3, 5$ в графе будет более одной вершины, и род не будет равен 3. Поясним, как это сделать. Если на склейке одна вершина, то, обходя ее по часовой стрелке, мы будем пересекать выходящие из нее ребра, каждое по два раза. Этому обходу соответствует перестановка сторон исходного двенадцатиугольника (так как его стороны суть ребра графа, причем каждое проходится по два раза). Если эта перестановка является циклом длины 12, то вершина единственна.

При $n = 4$ можно провести аналогичные рассуждения. Пусть опять буква a встречается в слове на i и j , ($i < j$) позициях, и $j - i < 6$. В данном случае слово 3-периодично, поэтому сразу заключаем, что $j - i \neq 3$ (для номеров позиций любой буквы). Остаются возможности $j - i = 2, 4, 5$. Соответствующие слова это $(a, b, a, c, d, c, e, b, e, f, d, f)$, $(a, b, c, d, a, e, f, d, c, b, f, e)$, $(a, b, c, d, e, a, f, b, d, c, e, f)$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что в заданных этими словами графах будет больше одной вершины. Утверждение доказано. ►

Утверждение 2.8. *Существуют ровно две склейки с $n = 3$.*

Доказательство.

Пусть буква a встречается в слове на i и j ($i < j$) позициях. Опять можно считать, что $j - i < 6$. Также, поскольку слово 4-периодично, заключаем, что $j - i \neq 4$. Если $j - i = 3$, то слово имеет вид $(a, *, *, a, b, *, *, b, c, *, *, c)$, где на месте $*$ стоят остальные три буквы. Здесь сразу выделяется вершина степени 3, из которой выходят ребра (a, c, b) . Следовательно, $j - i \neq 3$ для номеров любой буквы в слове. Аналогично доказывается, что $j - i \neq 5$. В случае $j - i = 1$ сразу получаем вершину степени 1, поэтому $j - i \neq 1$. Остались возможности $j - i = 2$ и $j - i = 6$, которые и дают два слова: $(a, b, a, b, c, d, c, d, e, f, e, f)$ и $(a, b, a, c, d, e, d, b, f, c, f, e)$. ►

Обозначим детские рисунки с этими гауссовыми словами $L[1]$ и $L[2]$ соответственно:

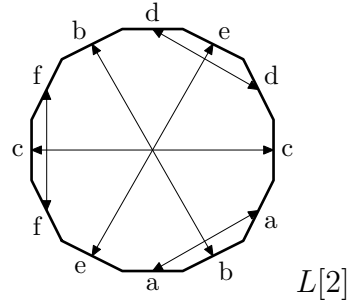
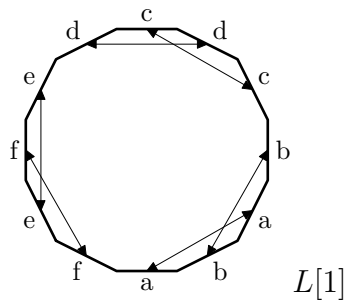


рис. 2

Теорема 2.9. *Существует ровно 10 склеек с $n = 2$.*

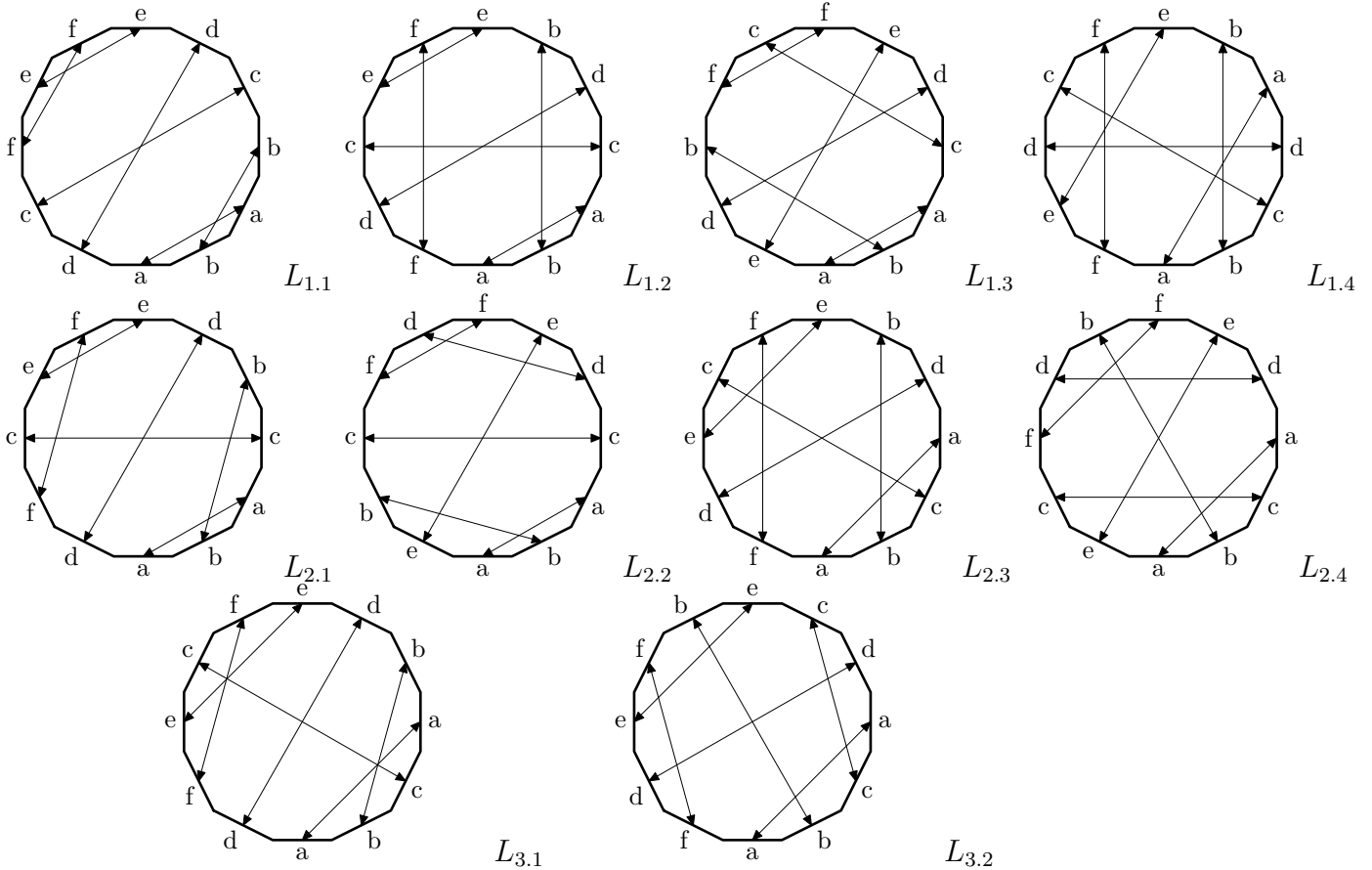


рис. 3

Доказательство.

Будем обозначать детские рисунки и склейки, изображенные на рисунке 3, через $L_{1.1}, \dots, L_{3.2}$.

Пусть на местах i и j ($i < j$) в гауссовом слове стоит буква a . Можно считать, что $j - i < 6$. Рассмотрим возможные случаи.

- Пусть $j - i = 2$, тогда слово выглядит так $a * a * * * b * b * * *$. Предположим, что другая буква, c , стоит на местах k, l . Заметим, что $|k - l| < 5$, так как мы рассматриваем 2-периодичные слова длины 12. Пусть $|k - l| = 2$, тогда это $acac * * bdbd * * *$ и, учитывая тот факт, что оно не более чем 2-периодично, получаем единственную возможность – $acacefdbbdef$ (склейка $L_{1.1}$). Если $|k - l| = 3$, то имеем только $acaecfdbbedf$ ($L_{2.1}$). Однако заметим, что у этой склейки нет зеркальной симметрии относительно главных диагоналей 12-угольника, следовательно нашим условиям удовлетворяет зеркально-симметричная ей склейка с гауссовым словом $acafdebdbfce$ ($L_{2.2}$). Если $|k - l| = 4$, то аналогично предыдущему случаю получаем две симметричные относительно главной диагонали склейки соответствующие словам $acae fcbdbefd$ ($L_{1.2}$) и $abacdefcfbde$ ($L_{1.3}$).
- Пусть $j - i = 3$. В этом случае для значения $|k - l|$ есть две возможности – 3, 4. Если $|k - l| = 3$, то это либо слово $ac * ac * bd * bd * = aceacfbde bdf$, которое соответствует $L_{3.1}$. Либо $a * ca * cb * db * d = aeca fcbde bdf$, соответствует $L_{3.2}$. Если $|k - l| = 4$, то это слово $ac * a * cbd * b * d = acea fcbde bdf$, соответствующее $L_{2.3}$. Опять же заметим, что эта склейка не зеркально-симметрична относительно главных диагоналей, и следовательно, получаем еще одно гауссово слово $abcade f bdfce$ ($L_{2.4}$).
- Пусть $j - i = 4$, тогда, исключая из рассмотрения уже полученные слова, приходим к $abcdabefcdef$ ($L_{1.4}$).

Таким образом, перечислены все рисунки с автоморфизмом 2 порядка.



В следующих параграфах мы вычисляем пары Белого найденных детских рисунков.

2.2.3 Детский рисунок с Z_{12} -симметрией

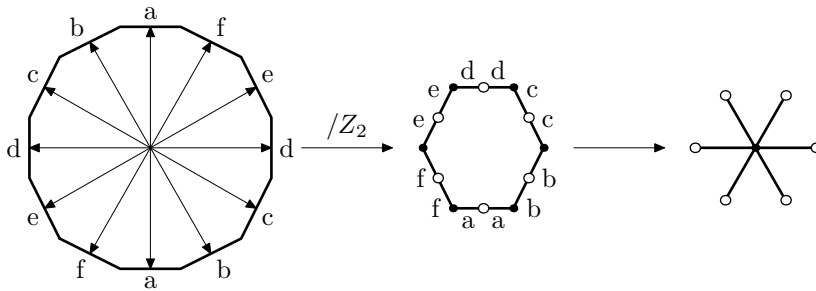


рис. 4

На рисунке 4 изображено последовательное сведение рассматриваемого детского рисунка рода 3 к детскому рисунку рода 0. Стрелка с $/Z_2$ означает, что мы склеиваем противоположные стороны двенадцатиугольника по стрелкам. При этом каждое ребро «ломается» в середине (потому что стороны двенадцатиугольника мы считаем ориентированными), и его половинки должны склеиться в одно ребро.

Функция Белого полученного детского рисунка рода 0 хорошо известна: $f = x^6$, причем, она поднимается на кривую $y^2 = x(x^6 - 1)$.

2.2.4 Детские рисунки с Z_3 -симметрией

Исследуем плоские проективные алгебраические кватрики с симметрией третьего порядка. Изначально, вообще говоря, не ясно, почему кривые, соответствующие этим детским рисункам не гиперэллиптические. Однако, поскольку пара Белого детского рисунка единственна (если она существует), а в этом случае (не гиперэллиптическом) найдены пары Белого всех имеющихся детских рисунков, то других не существует и пробела в рассуждениях нет.

Рассмотрим диагональные 3×3 матрицы, у которых на диагонали стоят числа $e^{\frac{2\pi i k_j}{3}}$, $j = 1, 2, 3$, $k_j \in \{0, 1, 2\}$. Всего таких матриц $3^3 = 27$, но если рассматривать их с точностью до умножения на константу и не учитывать скалярные матрицы, то останется всего 3 типа: с двумя единицами и $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ на диагонали (тип 1), с двумя единицами и $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ на диагонали (тип 2) и тип 3 — когда все три кубических корня из 1, стоящие на диагонали, различны.

Утверждение 2.10. *Каждый автоморфизм проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, имеющий порядок 3, проективно эквивалентен автоморфизму с матрицей одного из этих трех типов.*

Доказательство.

Лемма 2.11. *Жорданова нормальная форма матрицы автоморфизма проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, имеющего порядок три, диагональна.*

Доказательство леммы.

Возможны три случая: 1) матрица диагональна, 2) получились две жордановы клетки и 3) получилась одна клетка. Рассмотрим эти возможности, учитывая, что так как симметрия имеет порядок 3, то матрица в третьей степени должна быть равна матричной единице.

2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}$. То есть она диагональна только при $a = 0$, что влечет за собой вырожденность матрицы автоморфизма,

что невозможно. Аналогично рассматривается случай 3):

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}. \text{ Таким образом, возможен только}$$

случай 1). ►

Поскольку матрица проективного преобразования определена с точностью до пропорциональности и получилась диагональной, она принадлежит одному из трех, определенных перед утверждением 2.10 типов. Доказательство окончено. ►

Итак, рассмотрим Z_3 -симметричные кватрики в $\mathbb{C}P^2$. Пусть α — автоморфизм третьего порядка такой кватрики. Разберем случай конкретного α , имеющего тип 3. Мы покажем, что именно в этом случае реализуются пары Белого всех детских рисунков рода 3 с шестью ребрами, единственной вершиной и группой автоморфизмов порядка 3. Итак, зафиксируем $\alpha: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, имеющий в однородных координатах вид $(x : y : z) \mapsto (y : z : x)$.

Утверждение 2.12. *Уравнение Z_3 -симметричной неприводимой кватрики в $\mathbb{C}P^2$ с координатами $(x : y : z)$, инвариантной относительно автоморфизма α , с точностью до проективного сопряжения имеет следующий вид:*

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^3y + y^3z + z^3x) + c(x^3z + y^3x + z^3y) + d(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + e(xyz(x + y + z)) = 0 \quad (3)$$

Доказательство.

Заметим сначала, что любое такое уравнение допускает три записи, с точностью до проективного сопряжения. А именно, если заменить тройку $(x : y : z)$ на $(x : \varepsilon y : \varepsilon^2 z)$ (или $(x : \varepsilon^2 y : \varepsilon z)$), $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$, то оно останется неизменным под действием α (при перестановке координат каждый моном умножится на ε^2 (или ε), т.к. они все имеют одинаковую степень 4). Сопряжение $(x : y : z) \mapsto (x : \varepsilon^2 y : \varepsilon z)$ (соотв. $(x : y : z) \mapsto (x : \varepsilon y : \varepsilon^2 z)$) переводит уравнение в тот вид, который оно имело до замены.

Поэтому можно рассматривать только случай, когда под действием α все мономы умножаются на 1.

Множество мономов, которые входят в однородный полином, задающий кватрику, под действием автоморфизма α распадается на следующие орбиты: $O_1 := \{x^4, y^4, z^4\}$, $O_2 := \{x^3y, y^3z, z^3x\}$, $O_3 := \{x^3z, y^3x, z^3y\}$, $O_4 := \{x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2\}$ и $O_5 := \{x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$. Это, а также то, что других мономов нет, проверяется перебором всех случаев, который мы сейчас проведем. В самом деле, моном с x^4 только один и он лежит в орбите O_1 . Мономов с x^3 два: это x^3y и x^3z . Они принадлежат орбитам O_2

и O_3 соответственно. Мономов, содержащих x^2 три: x^2y^2 , x^2z^2 и x^2yz . Но первые два лежат в одной орбите (O_4), а третий - принадлежит орбите O_5 . Каждый из мономов с x (xy^3 , xy^2z , xyz^2 и xz^3) также принадлежит одной из рассматриваемых орбит. Мономов с x^0 два, y^4 и z^4 , они лежат в орбите O_1 . Других вариантов нет. Поскольку под действием автоморфизма уравнение переходит в себя, мономы, принадлежащие одной орбите, должны иметь одинаковые коэффициенты в полиноме. Поэтому уравнение и имеет нужный вид. ►

Пусть

$$\begin{aligned} p &:= x^4 + y^4 + z^4, \\ q &:= x^3y + y^3z + z^3x, \\ r &:= x^3z + y^3x + z^3y, \\ s &:= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \\ t &:= xyz(x + y + z). \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\psi : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^4, (x : y : z) \mapsto (p : q : r : s : t)$. Следующее утверждение легко следует из леммы 2.15.

Утверждение 2.13. *Отображение ψ осуществляет факторизацию кривой (3) по группе, порожденной автоморфизмом α .*

Фактор-кривая лежит в пересечении образа проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ и гиперплоскости, задаваемой уравнением $ap + bq + cr + ds + et = 0$. Образ $\psi(\mathbb{C}P^2)$ лежит в пересечении двух гиперповерхностей второго порядка, задаваемых квадратичными соотношениями на p, q, r, s, t .

Квадратичные зависимости.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2.14. *Многочлены p, q, r, s, t удовлетворяют квадратичным соотношениям*

$$s^2 + pt + st = qr + qt + rt; \quad q^2 + r^2 + t^2 = ps + 2st. \quad (4)$$

Разобьем доказательство теоремы на несколько лемм.

Перейдем от координат $(x : y : z)$ к координатам $(l_0 : l_1 : l_{-1})$, где $l_0 = x + y + z$, $l_1 = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z$, $l_{-1} = x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z$, $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$.

Лемма 2.15. Матрица перехода от базиса $(p : q : r : s : t)$ к базису $(l_1^3 l_0 : l_{-1}^3 l_0 : (l_1 l_{-1})^2 : l_0^4 : l_0^2 (l_1 l_{-1}))$ в $\psi(\mathbb{C}P^2) \subset \mathbb{C}P^4$ имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & \frac{4}{9} \\ \frac{-3\varepsilon-2}{9} & \frac{3\varepsilon+1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \\ \frac{3\varepsilon+1}{9} & \frac{-3\varepsilon-2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{27} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Доказательство.

Матрица A невырождена: $\det A = \frac{58\varepsilon+29}{3 \cdot 27^3} \neq 0$. Непосредственным вычислением проверено, что многочлены p, q, r, s, t линейно выражаются через мономы $(l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, l_0^2 (l_1 l_{-1}))$. ►

В качестве прямого следствия леммы 2.15 получаем, что

Лемма 2.16. Обратная замена имеет вид:

$$\begin{aligned} (l_1 l_{-1})^2 &= p - 2q - 2r + 3s; \\ l_0^4 &= p + 4q + 4r + 6s + 12t; \\ l_0^2 (l_1 l_{-1}) &= p + q + r - 3t; \\ l_1^3 l_0 &= p + (3\varepsilon + 1)q - (3\varepsilon + 2)r - 3s + 3t; \\ l_{-1}^3 l_0 &= p - (3\varepsilon + 2)q + (3\varepsilon + 1)r - 3s + 3t. \end{aligned}$$

Доказательство.

Эти равенства непосредственно проверены в системе компьютерной системе Maple. ►

Далее, легко видеть, что

$$l_0^4 (l_1 l_{-1})^2 - (l_1 l_{-1} l_0^2)^2 = 0; \quad (l_1^3 l_0)(l_{-1}^3 l_0) - (l_1 l_{-1} l_0^2)(l_1 l_{-1})^2 = 0. \quad (5)$$

Смысл перехода к сложным на первый взгляд координатам $(l_0 : l_1 : l_{-1})$ заключается в том, что в них эти квадратичные зависимости очень легко увидеть.

Лемма 2.17. Многочлены от $l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, l_0^2 (l_1 l_{-1})$, стоящие в левых частях соотношений (5), линейно независимы.

Доказательство.

В самом деле, они имеют разные степени по $l_0^2 (l_1 l_{-1})$.

►

Подставляя в (5) вместо мономов $l_1^3 l_0, l_{-1}^3 l_0, (l_1 l_{-1})^2, l_0^4, (l_1 l_{-1}) l_0^2$ их выражения через p, q, r, s и t , взятые из леммы 2.16, получим квадратичные соотношения:

$$\begin{aligned}
ps + 2pt - q^2 - 2qr - 2qt - r^2 - 2rt + 2s^2 + 4st - t^2 &= 0; \\
- ps + pt + q^2 - qr - qt + r^2 - rt + s^2 - st + t^2 &= 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

Сумма и половина разности соотношений (6) дают, соответственно, первое и второе из выражений (4). Теорема 2.14 доказана.

►

2.2.5 Пары Белого детских рисунков с Z_3 -симметрией

Теорема 2.18. *Парой Белого детского рисунка $L[1]$ является функция Белого:*

$$f = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}}x^2,$$

на кривой

$$z^6 + z^3x^2(3 + \sqrt{3}) - z^3x(1 + \sqrt{3}) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2),$$

записанной в координатах $(x : 1 : z)$.

Парой Белого детского рисунка $L[2]$ является функция Белого:

$$f = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}}x^2,$$

на кривой

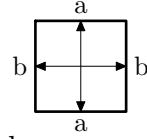
$$z^6 + z^3x^2(3 - \sqrt{3}) - z^3x(1 - \sqrt{3}) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2),$$

записанной в координатах $(x : 1 : z)$.

Доказательство.

Рассмотрим цепочку замен координат: $(x : y : z) \xrightarrow{/Z_3} (l_0 : l_1 : l_{-1}) \xrightarrow{/Z_3} (l_0^2 l_1 : l_1^2 l_{-1} : l_{-1}^2 l_0) \rightarrow (\frac{l_0 l_{-1}^2}{l_1^2 l_{-1}} : \frac{l_1^2 l_1}{l_1^2 l_{-1}} : 1)$. При их последовательном проведении, из уравнения (3) получится уравнение эллиптической кривой с неизвестными коэффициентами, которые находятся из нижеследующих соображений. При факторизации склеек $L[1]$ (напомним, ее гауссово слово $(a, b, a, b, c, d, c, d, e, f, e, f)$) и $L[2]$ (с гауссовым словом $(a, b, a, c, d, e, d, b, f, c, f, e)$) по их группе автоморфизмов Z_3 получается рисунок рода 1 с гауссовым словом (a, b, a, b) , пара Белого которого известна:

$X_0 : y^2 = x^3 - x$, $\beta = x^2$. Из совпадения j -инвариантов и соотношения на точки ветвления находятся коэффициенты кривой.



Соответствующие вычисления на Maple дали результат, сформулированный в теореме 2.18.

Будем обозначать пару Белого детского рисунка $L[1]$ за (X_1, f_1) и пару Белого детского рисунка $L[2]$ за (X_2, f_2) .

Лемма 2.19. *Пары Белого (X_1, f_1) и (X_2, f_2) не изоморфны.*

Доказательство.

Предположим, что существует изоморфизм $\phi : X_1 \rightarrow X_2$, для которого имеет место тождество $f_1 = f_2 \circ \phi$. Тогда этот изоморфизм имеет вид $x = P(x, y, z)$, $y = Q(x, y, z)$, $z = R(x, y, z)$, где P, Q, R — рациональные функции (x, y, z) .

Так как $f_2 \circ \phi = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}P(x)^2$, а $f_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}x^2$, то сразу получаем, что $P(x) = kx$, где k — один из корней уравнения $k^2(\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3} + 2$.

Ниже в доказательстве будем пользоваться тем, что кривые X_1 и X_2 являются пересечениями пар поверхностей

$$y^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad z^3 = x \left(y - 1 + (x - 1) \left(\frac{-\sqrt{3} - 3}{2}\right)\right)$$

и

$$y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad z^3 = x \left(y - 1 + (x - 1) \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2}\right)\right)$$

соответственно.

Так как точка с координатами (P, Q, R) лежит на кривой X_2 , то на кривой X_1 выполняется тождество $Q^2 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})P^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}P$. Следовательно, $Q^2 = k(k^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})x^3 + x\frac{\sqrt{3}}{2})$. Упростив, получим $Q^2 = -k((1 + \frac{\sqrt{3}}{2})x^3 - x\frac{\sqrt{3}}{2}) = -ky^2$. Следовательно, $Q = my$, $k = -m^2$.

Таким образом, $R^3 = P(Q - 1 + (P - 1)(\frac{\sqrt{3}-3}{2}))$ — не зависит от z . Действительно, получаем $R^3 = -m^2x(my + \frac{3-\sqrt{3}}{2}m^2x + \frac{1-\sqrt{3}}{2})$. Найдем нули функции R . Для этого рассмотрим произведение сопряженных: $W := (Q - 1 + (P - 1)(\frac{\sqrt{3}-3}{2}))(-Q - 1 + (P - 1)(\frac{\sqrt{3}-3}{2}))$.

Упрощая (с использованием выражения для Q^2), получим $W = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{3})(P - 1)^3$.

Итак, функция R имеет ноль второго порядка в точке $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ и нули в одной или нескольких из 6 точек, отвечающих $x = 1/k$.

Так как функция R^3 не зависит от z , то порядок нулей в точках с одинаковыми x, y совпадает. Так как степень R равна степени z и равна 5, то R имеет нули порядка 1 в 3 точках, отвечающих $x = 1/k, y = 1/m$.

С другой стороны, R можно единственным образом записать в виде $R = R_0(x) + R_1(x)z + R_2(x)z^2 + (R_3(x) + R_4(x)z + R_5(x)z^2)y$, где $R_j(x)$ – рациональные функции x . Сопряжение $z \mapsto \sqrt[3]{1}z$ переводит R^3 в себя, R при этом умножается на некоторый кубический корень из 1. То есть либо $R = R_0(x) + R_3(x)y$, либо $R = z(R_1(x) + R_4(x)y)$, либо $R = z^2(R_2(x) + R_5(x)y)$. Используя тот факт, что порядок в точке $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ выражения вида $R_j(x) + yR_k(x)$ кратен 3, получаем, что $R = z(R_1(x) + R_4(x)y)$.

Отсюда R/z – функция на эллиптической кривой $y^2 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ с единственным нулем (в точке $x = 1/k, y = 1/m$) и полюсом (в точке $x = 1, y = 1$) первого порядка. Полученное противоречие завершает доказательство.



Таким образом, установлено, что две найденные пары Белого находятся в однозначном соответствии с двумя детскими рисунками $L[1]$ и $L[2]$. Соответствие знаков получено вычислениями на Maple.

2.2.6 Детские рисунки с Z_2 -симметрией

Обозначим следующие торические детские рисунки (то есть детские рисунки с отождествленными противоположными сторонами) через T_1, T_2 и T_3 соответственно:

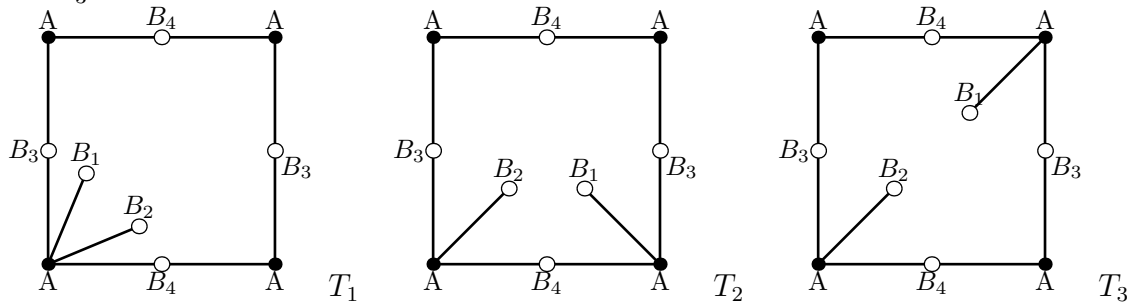


рис. 5

Напомним, что факторизация детского рисунка по группе автоморфизмов является детским рисунком (см. утверждение 2.5) и мы называем такой детский рисунок факторрисунком.

За процессом факторизации детского рисунка по группе автоморфизмов удобно следить посредством слейки многоугольника. При факторизации по группе автоморфизмов второго порядка происходит склеивание противоположных сторон двенадцатиугольника. При этом, каждое

ребро «ломается в середине» (потому что стороны мы считаем ориентированными) и его половинки склеиваются в одно ребро. Например, ниже изображен факторрисунок детского рисунка $L_{1.1}$:

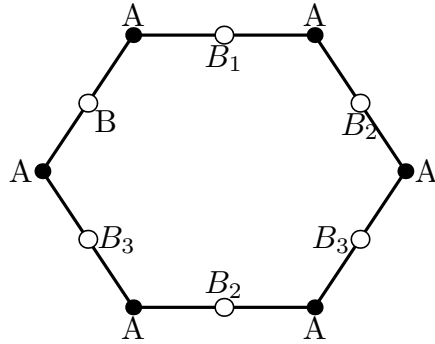


рис. 6

Это двукрашенный детский рисунок на кривой рода 1. Отметим, что это и есть детский рисунок T_1 .

Далее, заметим, что существует алгебраическое накрытие

$$p_{1.1}: X_{i,j} \rightarrow \widetilde{X}_{i,j} \quad (7)$$

степени 2, разветвленное над четырьмя точками. Здесь $X_{i,j}$ — кривая рисунка $L_{i,j}$ и $\widetilde{X}_{i,j}$ — кривая детского рисунка T_i рода 1.

На рисунке 6 A, B, B_1 и центр грани шестиугольника C — это точки ветвления накрытия $p_{1.1}$. Аналогично строятся факторрисунки (совпадающие с T_1, T_2, T_3) остальных девяти детских рисунков $L_{i,j}$, см. теорему 2.9, с группой автоморфизмов второго порядка.

Таким образом, десять детских рисунков $L_{i,j}$ естественным образом делятся на три группы (в одну группу попадают детские рисунки с одинаковым фактором). Результаты сгруппированы в три пункта теоремы:

Теорема 2.20. 1. *Пара Белого детского рисунка $L_{1.1}$ это функция Белого*

$$f = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right)$$

на кривой, являющейся прообразом кривой:

$$y^2 = (z + 1)(z^3 - 3z^2 - 4)$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = z - 3.$$

Пары Белого детских рисунков $L_{1.2}, L_{1.3}, L_{1.4}$ это выраженная той же формулой функция Белого на кривой, являющейся прообразом кривой

$$y^2 = (z + 1)(z^3 - 3z^2 - 4)$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = u_i, \quad i = 2, 3, 4; \quad u_{2,3,4} = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha), \text{ где } \alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0.$$

2. Пары Белого детских рисунков $L_{2,1}$, $L_{2,2}$, $L_{2,3}$, $L_{2,4}$ это функция Белого

$$f = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y$$

на кривой, являющейся прообразом кривой

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60,$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = (\pm y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4})(z - \alpha),$$

где $5\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$.

3. Пары Белого детских рисунков $L_{3,1}$ и $L_{3,2}$ это пары

$$\text{функция } f = z^3$$

на кривой, являющейся прообразом кривой

$$y^2 = \frac{z}{3}(z^2 + z + 1),$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = (y + z)(z - 1); \quad u$$

$$\text{функция } f = z^3$$

на кривой, являющейся прообразом кривой

$$y^2 = -z(z^2 + z + 1),$$

при разветвленном накрытии степени 2

$$w^2 = (y + z)(z - 1).$$

Оставшаяся часть этой главы посвящена доказательству теоремы. Мы вычислим пары Белого детских рисунков T_1 , T_2 и T_3 и восстановим пары Белого детских рисунков $L_{i,j}$.

Утверждение 2.21. *Существует отображение кривой рода 1 на кривую рода 0, являющееся композицией $p_2 \circ h \circ g$, где $h(t) = \frac{4t}{(t+1)^2}$, $g(t) = \frac{1}{t}$, и p_2 — это двулистное накрытие, разветвленное в четырех точках.*

Доказательство.

Отображение кривых g соответствует переходу к объединению детского рисунка с двойственным к нему. В частности, для T_1 полученный детский рисунок изображен на рисунке 7.

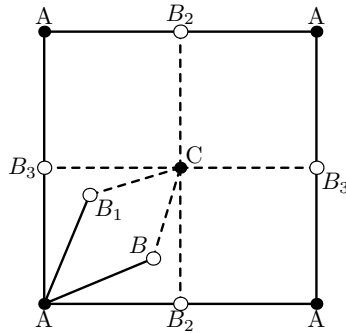


рис. 7 (\widehat{T}_1)

Отображение h соответствует переходу к двойственному детскому рисунку ST_1 , так как нули \widehat{T}_1 переходят в точки бесконечность ST_1 и наоборот.

Заметим, что его группа автоморфизмов равна Z_2 , следовательно, можно рассмотреть факторрисунок:

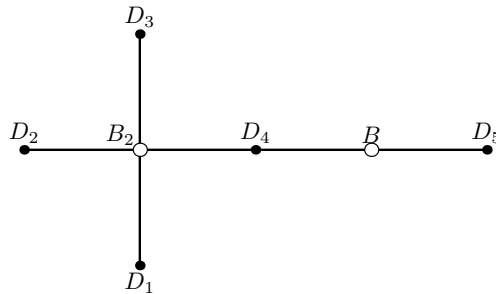


рис. 8

Отображение факторизации – это двулистное накрытие, разветвленное в точках D_1, D_2, D_3 и D_5 , это и есть p_2 .



Следствие 2.22. Функция Белого f_i детского рисунка T_i есть композиция $h \circ g \circ f_{si}$, где f_{si} – это функция Белого детского рисунка ST_i .

Замечание 2.23. Формула для функции Белого $f_{i,j}$ детского рисунка $L_{i,j}$ во всех девяти случаях совпадает с формулой для f_i .

Перейдем к вычислению пар Белого полученных детских рисунков.

Вычисление пар Белого детских рисунков с факторрисунком T_1 .

Определение 2.24. Многочлен с не более чем двумя критическими значениями называется *многочленом Шабата* или *обобщенным многочленом Чебышева*.

В том случае, когда гиперкарта оказывается деревом, функция Белого соответствующего детского рисунка является обобщенным многочленом Чебышева. Более того:

Теорема 2.25 ([12]). *Существует биекция между множеством комбинаторных двукрашенных плоских деревьев и множеством классов эквивалентности обобщенных многочленов Чебышева.*

Утверждение 2.26. $z^4(z-3)^2$ — обобщенный многочлен Чебышева дерева на рисунке 8.

Утверждение 2.27. *Пара Белого детского рисунка ST_1 — это функция Белого*

$$f_{s1} = 1 - \frac{1}{16}z^4(z-3)^2$$

на кривой $y^2 = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4$.

Формулы совпадают с результатами в [23].

Доказательство.

Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого. Далее, $z^4(z-3)^2 - 16 = (z-2)^2P_4(z)$, где значение 2 как раз соответствует вершине D_4 валентности 2. Отсюда

$$P_4(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = y^2$$

►

Утверждение 2.28.

$$f_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right)$$

Доказательство.

Обозначим за $f_{\widehat{T}_1}$ функцию Белого детского рисунка \widehat{T}_1 (см. рис. 7), тогда из (7) и утверждения 2.21 получаем, что $f_{\widehat{T}_1} = \frac{4f_1}{(f_1+1)^2} = \frac{1}{f_{s1}}$. Таким образом, получаем уравнение на f_1 :

$$(f_1 + 1)^2 = 4f_1f_{s1}.$$

Решая его относительно f_1 , получаем функцию:

$$f_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right)$$

►

Далее, рассмотрим накрытие $p_{1,1}$ (см. (7)) в случае детского рисунка $P_{1,1}$, оно имеет вид $(z, w) \rightarrow z$; $w^2 \mapsto u$. Дивизор функции f равен

$$(u) = A + C + B + B_1 + 2D. \quad (8)$$

Функция u определена с точностью до умножения на квадрат, а $\deg(D) = -2$. Дивизор D может быть представлен в виде

$$(D) = -2A - 2C + T + X, \quad (9)$$

где $y(T) = 0$, $z(T) = -1$, а X — некоторая точка. Заметим, что точки ветвления A и C находятся в бесконечности, а B и B_2 в $z = 3$.

Утверждение 2.29. Либо $w^2 = u_1 = z - 3$, либо $w^2 = u_i = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$, где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$, $i = 2, 3, 4$.

Доказательство.

Используя (8) и (9), можем представить дивизор функции u в виде $(u) = -3A - 3C + B_1 + B_2 + 2T + 2X$. Далее, $(z - 3) = B + B_1 - A - C$ и $(z + 1) = 2T - A - C$, следовательно можем записать: $\left(\frac{f}{(z - 3)(z + 1)} \right) = -A - C + 2X$. Но такие функции есть просто $z - z_j$, где z_j корень уравнения $z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = 0$. Получаем либо $u_1 = z - 3$, либо $u_{2,3,4} = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$, где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$.

►

Определение 2.30. Универсальной группой вращений ребер **ER** назовем свободную группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ с двумя образующими a и b .

Определим действие универсальной группы вращений ребер на множестве ребер $E(D)$ детского рисунка D следующим образом: $\forall e \in E(D)$ $a(e)$

— это следующее ребро при повороте против часовой стрелки вокруг белой вершины, $b(e)$ — при повороте вокруг черной вершины соответственно. Таким образом задан гомоморфизм $\pi_D : \mathbf{ER} \rightarrow \text{Aut}(E(D))$, где $\text{Aut}(E(D))$ — множество всех перестановок ребер детского рисунка D .

Группа перестановок $\pi_D(\mathbf{ER})$ ребер детского рисунка D называется *группой вращений ребер детского рисунка D* и обозначается $ER(D)$.

Получены четыре кривые рода 3, которые соответствуют четырем детским рисункам $L_{1.1}, L_{1.2}, L_{1.3}, L_{1.4}$. Заметим, что у детских рисунков $L_{1.2}, L_{1.3}, L_{1.4}$ одинаковый порядок группы вращений ребер, равный 1152, и следовательно (см. [1]), они лежат в одной орбите действия группы Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ и им соответствуют решения $u_{2,3,4}$. Таким образом, доказан первый пункт теоремы 2.20.

Вычисление пар Белого детских рисунков с факторрисунком T_2 .

Далее, рассмотрим детские рисунки $L_{2.1}, L_{2.2}, L_{2.3}, L_{2.4}$ и их факторрисунок T_2 .

Отображение факторизации с факторрисунком T_2 также можно понимать как алгебраическое накрытие $p_{2.1}$ степени 2 : $(z, w) \rightarrow z; w^2 \mapsto u$, разветвленное в точках A, C, B_1, B_2 , где C это бесконечно удаленная точка.

Применив (7) и утверждение 2.21, получим детский рисунок ST_2

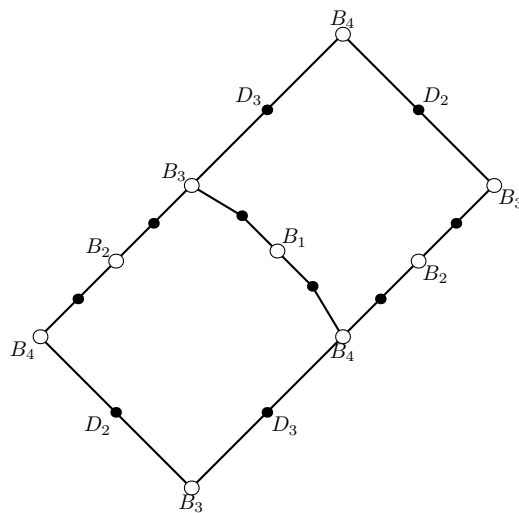


рис. 9 (ST_2)

и после факторизации по автоморфизму второго порядка, детский рисунок рода 0

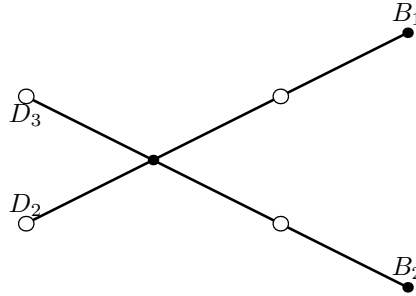


рис. 10

Это отображение факторизации можно понимать как алгебраическое накрытие степени 2, разветвленное в точках B_1, B_2, D_2, D_3 . Несложные вычисления доставляют обобщенный многочлен Чебышева полученного дерева: $P(z) = z^4(z - (a + i))(z - (a - i)) = z^4((z - a)^2 + 1)$. Коэффициенты многочлена должны быть рациональны и единственное a , удовлетворяющее такому условию — это $a = \pm \frac{3}{4}$.

Утверждение 2.31. *Пара Белого детского рисунка ST_2 это функция*

$$f_{s2} = -\frac{27}{16}z^4(5z^2 - 6z + 5)$$

на кривой

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60.$$

Доказательство.

Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого.

$$f_{s2} - 1 = -\frac{1}{16}(15z^2 + 12z + 4)(3z^2 - 3z + 2)^2 \Rightarrow y^2 = 3(5z^2 - 6z + 5)(15z^2 + 12z + 4).$$



Аналогично предыдущему случаю, получаем уравнение на функцию Белого f_2 детского рисунка T_2 : $f_2^2 + 2f_2(1 - 2f_{s2}) + 1$. Решением уравнения является функция

$$f_2 = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y.$$

Как уже отмечалось, накрытие $p_{2,1}$ имеет вид $w^2 = u$, где функция u определена с точностью до умножения на квадрат. Дивизор функции u

равен $(u) = A + C + B_1 + B_2 + 2D$, где $\deg(D) = -2$, причем дивизор D можно представить в виде $(D) = -2A - 2C + B_1 + X$.

Введем функцию g , такую, что дивизор (g) удовлетворяет условию $(u) = (z - z(B_1))(g)$. Тогда $g = y + kQ(z)$, где $Q(z) = (z - z(B_1))(z - z(B_2))$. Найдем k из условия равенства нулю дискриминанта уравнения $(y + kQ(z))(-y + kQ(z)) = 0$.

$$k = \pm \frac{3}{4}.$$

Соответственно, $g_1 = y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4}$, $g_2 = y - \frac{15}{4}z^2 + \frac{9}{2} - \frac{15}{4}$. Таким образом получается 4 варианта для функции u : $u_{1,2,3,4} = g_{1,2}\alpha_{1,2}$, где $\alpha_{1,2}$ корни уравнения $5x^2 - 6x + 5 = 0$, что доказывает пункт 2 теоремы 2.20.

Вычисление пар Белого детских рисунков с факторрисунком T_3 .

Перейдем к детским рисункам $L_{3.1}$, $L_{3.2}$ и их факторрисунку T_3 .

Заметим, что сам T_3 обладает Z_2 -симметрией, и следовательно, по тем же причинам что и в предыдущих случаях, можем рассмотреть факторризацию по группе автоморфизмов $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это алгебраическое накрытие степени 2, разветвленное в точках A , B_1 , B_2 и в точке C (центр грани квадрата, см. рис. 5). Факторрисунком является «еж» с тремя ребрами. Его обобщенным многочленом Чебышева является многочлен $P(z) = z^3$.

Как уже отмечалось, алгебраическое накрытие степени 2, разветвленное в точках A , C , B_1 и B_2 (см. рис. 5), при котором $L_{3.1}$ (либо $L_{3.2}$) накрывает T_3 , имеет вид $(z, w) \rightarrow z$; $w^2 \mapsto u$, где дивизор функции u равен $(u) = A + C + B_1 + B_2 + 2D$. Кратности точек A , C , B_1 , B_2 равны 1, $\deg(D) = -2$. Можно считать, что $D = X - 3C$, тогда $(u) = A + B_1 + B_2 + 2X - 5C$. Из топологических соображений видно, что $(z - 1) = B_1 + B_2 - 2C$.

Введем функцию $g = \frac{u}{z-1}$. Тогда $(g) = A + 2X - 3C$. Исходя из общей теории можно записать g в виде: $g = y + P(z)$, где $\deg(P) = 1$. То есть $g = y + kz + l$. Значение g в точке A равно 0, но и $z(A) = y(A) = 0$, следовательно $l = 0$. Найдем k ; для этого потребуем равенства нулю дискриминанта уравнения $(y + kz)(-y + kz) = 0$. Вычисляя получаем, что либо $k = \pm 3$, либо $k = \pm i$. Таким образом, $g_1 = y + z\sqrt{3}$, $g_2 = y + iz$. И получились следующие кривые рода 3:

$$w^2 = (y + z\sqrt{3})(z - 1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1) \quad \text{и} \quad w^2 = (y + iz)(z - 1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1).$$

Заметим, что если в первой кривой сделать замену $y = Y\sqrt{3}$, $w = w$, а во второй $y = iY$, $w = w$, то получится в точности формулировка третьего пункта теоремы 2.20.

2.3 Накрытия с четырьмя точками ветвления

Перейдем к рассмотрению стратов размерности 1 в пространствах рациональных функций. Они состоят из функций с четырьмя критическими значениями. Разными авторами [29], [47] было замечено, что на всякой неприводимой компоненте такого страта естественным образом строится пара Белого. Как показано в [27], любая пара Белого реализуется таким образом.

В настоящем разделе мы приводим результаты вычислений детских рисунков, отвечающим стратам размерности 1 в пространствах рациональных функций степеней меньших 6 на кривых родов 0, 1, 2. В вычислениях мы следуем алгоритму, предложенному А.Звонкиным [47]. Алгоритм реализован в системе Maple.

В частности, мы покажем, что мегакартам с функциями малых степеней на кривых малых родов отвечают детские рисунки рода 0, перечислим мегакарты родов меньших 4 с функциями степеней меньших 5 и дадим некоторые вычислительные результаты.

2.3.1 Действие группы кос Гурвица

Определение 2.32. Фундаментальная группа пространства конфигураций из k попарно различных точек на $\mathbb{C}P^1$ называется *группой кос Гурвица* и обозначается \mathcal{H}_k . Группа кос Гурвица похожа на введенную три десятилетия спустя группу кос Артина, представляющую собой фундаментальную группу пространства конфигураций из k попарно различных точек в \mathbb{C}^1 .

Она была введена Гурвицем в [34]. Эта группа допускает следующее задание образующими и соотношениями.

Утверждение 2.33. *Группа \mathcal{H}_k задается $k-1$ образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ и соотношениями*

- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ при $|i - j| \geq 2$;
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ при $i = 1, \dots, k - 2$;
- $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-2} \dots \sigma_2 \sigma_1 = id$.

Группа кос Гурвица \mathcal{H}_k действует на k -созвездиях следующим образом:

$$\sigma_i : [g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_k] \mapsto [g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_k].$$

Определение 2.34. Два разветвленных накрытия $f_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ и $f_2 : C_2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ называются *гибко эквивалентными*, если найдутся такие два гомеоморфизма $u : C_1 \rightarrow C_2$ и $v : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{u} & C_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{v} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

Теорема 2.35. *Два разветвленных накрытия сферы гибко эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им созвездия принадлежат одной орбите действия группы кос Гурвица.*

Доказательство можно найти, например, в [12, с. 319].

2.3.2 Мегакарты

Вычисление пар Белого, в том числе, отвечающих стратам размерности 1, представляет собой вычислительно трудоемкое занятие. В большинстве случаев их удастся вычислить лишь в комбинаторных терминах — описать соответствующий паре детский рисунок (в терминологии Гротендика [32]). Определить же точку в пространстве модулей, отвечающую кривой определения данной пары Белого, а также найти явное выражение для функции Белого, удастся редко.

Рассмотрим 4-созвездие $S = [g_1, g_2, g_3, g_4]$ и соответствующее ему разветвленное накрытие сферы с четырьмя точками ветвления $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}P^1$. Любые три из этих точек можно дробно-линейным преобразованием перевести в точки $0, 1$ и ∞ , тогда четвертое критическое значение может принимать любое значение из \mathbb{C} , отличное от $0, 1, \infty$. Пусть четырьмя точками ветвления будут точки $0, y, 1, \infty$.

Зафиксируем паспорт π и рассмотрим множество всех пар $H_\pi = \{(S, y)\}$, где S — созвездие с паспортном π и $y \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Нетрудно проверить [47], что верно следующее утверждение:

Утверждение 2.36. *Множество H_π обладает структурой некомпактной и, возможно, несвязной римановой поверхности.*

Утверждение 2.37. *Функция $\beta : (S, y) \mapsto y$ является функцией Белого на компактификации каждой компоненты связности H_π .*

Это утверждение очевидно следует из данных определений, потому что функция β неразветвлена вне множества $\{0, 1, \infty\}$.

Найдем тройку перестановок, описывающую детский рисунок, который задается функцией Белого β . Для этого нужно определить монодромию соответствующего накрытия. Зафиксируем точку $y_0 \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ и рассмотрим петли вокруг точек $0, 1$ и ∞ с началом и концом в точке y_0 , которые описывает параметр y . Выразим их через образующие группы кос Гурвица \mathcal{H}_4 :

- петля, обходящая вокруг нуля, равна $\Sigma = \sigma_1^2$;
- петля, обходящая вокруг единицы, равна $A = \sigma_2^2$;
- петля, обходящая вокруг бесконечности, равна $\Phi = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2$.

Утверждение 2.38. *Перестановки Σ, A и Φ задают детский рисунок.*

Доказательство. Проверим, что $\Sigma A \Phi = id$ в \mathcal{H}_4 :

$$\sigma_1^{-1}\Sigma A \Phi \sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1 = id.$$

Теорема 2.13 означает, что классы гибкой эквивалентности разветвленных накрытий с 4 точками ветвления совпадают с орбитами действия группы $\langle \Sigma, A, \Phi \rangle$ на множестве 4-созвездий с заданным паспортом. Мощност каждой из таких орбит равна количеству листов накрытия, задающего компактификацию каждой компоненты связности H_π , то есть в точности степени функции Белого. С другой стороны, суммарная мощност всех орбит равна количеству классов изоморфизма 4-созвездий.

Следствие 2.39. *Результатом действия группы $\langle \Sigma, A, \Phi \rangle$ на множестве 4-созвездий с заданным паспортом является детский рисунок (или несвязное объединение нескольких детских рисунков) с функцией Белого $\beta : (S, y) \mapsto y$. Его ребра взаимно-однозначно соответствуют классам изоморфизма 4-созвездий, а циклический порядок ребер вокруг черных, белых вершин и граней — орбитам действия на этих классах перестановок Σ, A и Φ соответственно.*

Определение 2.40. *Мегакарта* — это множество E , элементами которого являются неизоморфные классы 4-созвездий, а само оно является орбитой действия подгруппы \mathcal{P} группы \mathcal{H}_4 . $\mathcal{P} = \langle \Sigma, A, \Phi \rangle$, где $\Sigma = \sigma_1^2, A = \sigma_2^2, \Phi = \sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — образующие группы кос Гурвица \mathcal{H}_4 .

Заметим, что вершины (черные и белые) и центры граней мегакарты отвечают совпадениям четвертого критического значения y с точками

0, 1 или ∞ соответственно. Таким образом, вершинам и граням мегакарты можно поставить в соответствие детские рисунки, либо несвязное объединение детских рисунков (потому что это накрытия с тремя критическими значениями). Если y совпадает с нулем, то детский рисунок задается тройкой перестановок $[g_1g_2, g_3, g_4]$. Действие элемента $\Sigma = \sigma_1^2$ не меняет тройку $[g_1g_2, g_3, g_4]$, следовательно, у всех ребер, выходящих из одной черной вершины, тройки $[g_1g_2, g_3, g_4]$ одинаковые, то есть указанное соответствие корректно и каждой черной вершине соответствует один детский рисунок. Аналогично, если y совпадает с единицей, то детский рисунок задается тройкой перестановок $[g_1, g_2g_3, g_4]$, не меняющейся под действием элемента $A = \sigma_2^2$. И, наконец, граням соответствуют 3-созвездия $[g_1, g_2g_3g_2^{-1}, g_2g_4]$, не меняющиеся под действием элемента Φ .

2.3.3 Описание алгоритма

В этом разделе мы описываем алгоритм перечисления мегакарт. В качестве входных данных программа получает n — степень накрытия и паспорт 4-созвездия $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$, где λ_i — цикловая структура перестановки $g_i \in S_n$.

На первом шаге алгоритма выясняется, реализуется ли накрытие с такими данными ветвления. Для этого фиксируется перестановка g_1 циклического типа λ_1 и проверяется, существуют ли перестановки $g_2, g_3 \in S_n$ циклических типов λ_2, λ_3 соответственно, такие, что перестановка $g_1g_2g_3$ имеет циклический тип λ_4 . Если такие g_2, g_3 находятся, то накрытие реализуется. Все пары g_2, g_3 , реализующие накрытие заданного типа, записываются в отдельный список L .

На втором шаге определяется, какие из полученных созвездий изоморфны. Как уже отмечалось, количество классов изоморфизма 4-созвездий есть общее число ребер в будущем детском рисунке (это множество может разбиваться на несколько детских рисунков — орбит действия группы \mathcal{P}). Заметим, что мы работаем с тройками перестановок, а не с четверками и воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение 2.41. Пусть $s, g_1, g_2, g_3 \in S_n$. Если $sg_1s^{-1} = g_1$, и $sg_2g_3s^{-1} = g_2g_3$, то $sg_1g_2g_3s^{-1} = g_1g_2g_3$.

Таким образом, на каждую пару перестановок из списка L необходимо подействовать сопряжениями, то есть элементами из стабилизатора перестановки g_1 . Каждой паре перестановок из L присваивается порядковый номер и изоморфным парам присваиваются одинаковые номера. В дальнейшем будем работать именно с этими номерами. Список номеров будем также называть L .

На третьем шаге определяются орбиты действия группы \mathcal{P} на классах изоморфизма накрытий. Для каждого номера из L определяется номер, в который он переходит под действием каждой из трех образующих группы \mathcal{P} , для каждого из трех полученных номеров проводится аналогичная операция и так до тех пор, пока в процессе не появляется уже встречавшийся номер. Так получаются орбиты каждого номера при действии \mathcal{P} (это также списки номеров из L). После эти множества объединяются, если в них есть общие номера. Напомним, что множество номеров, являющееся орбитой действия элемента Σ — это в точности одна из перестановок 3-созвездия (или несколько перестановок нескольких 3-созвездий, в случае несвязной мегакарты), которое соответствует всей мегакарте. Она задает циклический порядок ребер вокруг черных вершин мегакарты. Аналогично, орбита действия элемента A образует перестановку ребер, задающую циклический порядок вокруг белых вершин, а орбита действия элемента Φ — циклический порядок ребер вокруг граней.

2.3.4 Результаты вычислений

Пусть дано разветвленное накрытие $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $g = g(C)$ — род накрываемой поверхности.

Теорема 2.42. *Детский рисунок, соответствующий мегакартам при $g(C) \leq 2$ и $\deg(f) \leq 4$ имеет род 0.*

Доказательство. В таблице приведены количества ребер, вершин (черных и белых) и граней детских рисунков, отвечающих мегакартам при роде накрываемой поверхности 0, 1, 2 и степени функции не более 4. Индекс у паспорта означает наличие нескольких неприводимых компонент у мегакарты при данном паспорте.

паспорт созвездия, $g(C)$	# ребер	# вершин	# граней	род мегакарты
$\langle 4 2, 1, 1 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	4	4	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	6	6	2	0
$\langle 3, 1 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle, 0$	3	3	2	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle_1, 0$	1	2	1	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 1, 1 2, 1, 1 \rangle_2, 0$	2	3	1	0
$\langle 3 2, 1 3 2, 1 \rangle, 1$	2	2	2	0
$\langle 2, 1, 1 4 2, 1, 1 4 \rangle_1, 1$	4	4	2	0
$\langle 2, 1, 1 4 2, 1, 1 4 \rangle_2, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 2, 1, 1 3, 1 4 \rangle, 1$	8	7	3	0
$\langle 2, 2 2, 1, 1 2, 2 4 \rangle_1, 1$	1	2	1	0

$\langle 2, 2 2, 1, 1 2, 2 4 \rangle_2, 1$	1	2	1	0
$\langle 2, 1, 1 2, 2 3, 1 4 \rangle, 1$	3	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_1, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_2, 1$	2	2	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_3, 1$	2	3	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_4, 1$	2	4	1	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_5, 1$	2	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 3, 1 \rangle_6, 1$	2	3	2	0
$\langle 3, 1 3, 1 3, 1 2, 2 \rangle, 1$	4	4	2	0
$\langle 3, 1 2, 2 3, 1 2, 2 \rangle, 1$	3	4	1	0
$\langle 2, 2 2, 2 2, 2 2, 2 \rangle_{1, \dots, 4}, 1$	1	2	1	0
$\langle 4 4 3, 1 3, 1 \rangle_1, 2$	6	6	2	0
$\langle 4 4 3, 1 3, 1 \rangle_2, 2$	2	3	1	0
$\langle 4 4 3, 1 2, 2 \rangle, 2$	3	3	2	0
$\langle 4 4 2, 2 2, 2 \rangle_1, 2$	2	3	1	0
$\langle 4 4 2, 2 2, 2 \rangle_2, 2$	1	2	1	0
$\langle 4 4 4 2, 1, 1, 1 \rangle, 2$	4	4	2	0

Пример 2.43. Мегакарте рода 0, соответствующей накрытию степени 4 с паспортом $\langle 3, 1|3, 1|2, 1, 1|2, 1, 1 \rangle$ (рис. 1), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (13)(2, 5, 6, 4), \quad A = (1)(2)(3, 5, 4), \quad \Phi = (2, 4)(1, 3, 6, 5).$$

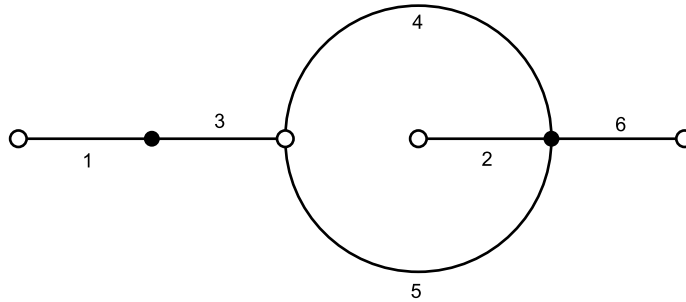


Рис. 1. Мегакарта накрытий с паспортом $\langle 3, 1|3, 1|2, 1, 1|2, 1, 1 \rangle$.
Представляет собой детский рисунок на поверхности рода 0.

В следующей таблице приведены результаты работы программы для некоторых мегакарт рода 2 со степенью функции 5.

паспорт созвездия, $g(C)$	# ребер	# вершин	# граней	род мегакарты
$\langle 5 5 4, 1 2, 1, 1, 1\rangle, 2$	24	15	5	3
$\langle 5 5 3, 2 2, 1, 1, 1\rangle, 2$	14	11	3	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1\rangle_1, 2$	2	3	1	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1\rangle_2, 2$	5	5	2	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1\rangle_3, 2$	12	9	3	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 3, 1, 1\rangle_4, 2$	15	11	4	1
$\langle 5 5 3, 1, 1 2, 2, 1\rangle_1, 2$	12	10	4	0
$\langle 5 5 3, 1, 1 2, 2, 1\rangle_2, 2$	12	8	4	1

Пример 2.44. Неприводимой компоненте рода 0 мегакарты, соответствующей накрытию степени 5 с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|2, 2, 1\rangle$ (рис. 2), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (1, 3)(2, 8, 9, 10, 4)(5, 11)(6, 12, 7),$$

$$A = (1, 2)(3, 7, 8)(4, 11)(5, 10, 12)(6)(9),$$

$$\Phi = (1, 4, 5, 6, 7)(2, 3)(8, 12, 9)(10, 11).$$

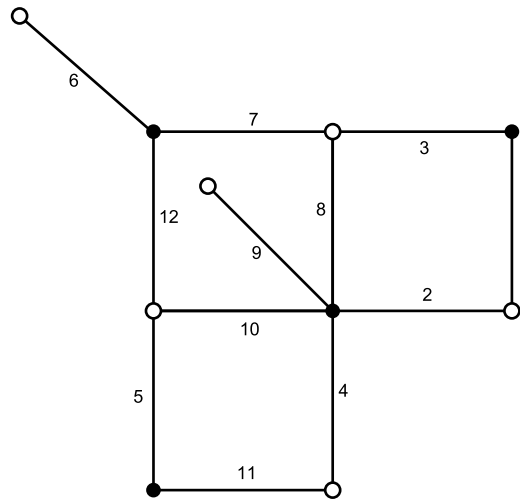


Рис. 2. Одна из мегакарт накрытий с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|2, 2, 1\rangle$. Отвечает связной компоненте H_π рода 0.

Пример 2.45. Неприводимой компоненте рода 1 с 12 ребрами мегакарты, соответствующей накрытию степени 5 с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|3, 1, 1\rangle$ (рис. 3), отвечает тройка перестановок

$$\Sigma = (1, 3, 4, 5, 6)(2, 10, 9, 12, 7)(8, 11),$$

$$A = (1, 2)(3)(4, 9)(5, 11, 7)(6, 12, 8)(10),$$

$$\Phi = (1, 7, 8, 9, 3)(2, 6, 11, 4, 10)(5, 12).$$

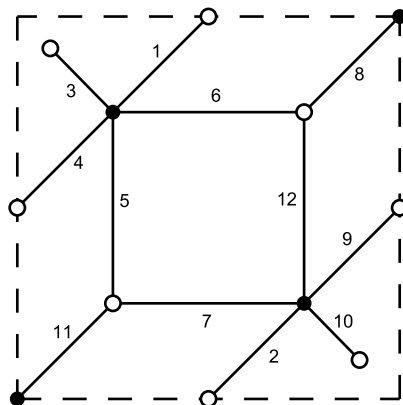


Рис. 3. Одна из четырех мегакарт накрытий с паспортом $\langle 5|5|3, 1, 1|3, 1, 1 \rangle$.
Отвечает связной компоненте H_π рода 1.

Теорема 2.46. *Всего существует 57 связных мегакарт с $g(C) = 2$ и $\deg(f) = 5$ при 16 различных паспортах и 21 связная мегакарта с $g(C) = 3$ и $\deg(f) = 5$ при 5 различных паспортах. Максимальное количество ребер среди соответствующих детских рисунков равно 40.*

Пример 2.47. Как отмечалось в конце второго раздела, каждой вершине и грани мегакарты соответствует накрытие с тремя точками ветвления, то есть детский рисунок или несвязное объединение нескольких детских рисунков. В частности, вершинам мегакарты, изображенной на рисунке 1 отвечают следующие тройки перестановок, задающие детские рисунки.

Черным вершинам слева направо:

$\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (2, 3)$, $\varphi = (1, 3)$ — один из несвязного объединения двух детских рисунков;

$\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 4, 3, 2)$, $\varphi = (3, 4)$.

Белым вершинам слева направо:

$\sigma = (2, 4)$, $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\varphi = (1, 3)$;

Следующей вершине отвечает несвязное объединение двух детских рисунков: тривиального и заданного перестановками $\sigma = (1, 4, 3)$, $\alpha = (3, 4)$, $\varphi = (1, 3)$;

$\sigma = (1, 3)$, $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\varphi = (2, 4)$;

$\sigma = (3, 4)$, $\alpha = ()$, $\varphi = (3, 4)$ — один из несвязного объединения двух детских рисунков.

Внутренней грани: $\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 2)$, $\varphi = (2, 3)$ и тривиальный детский рисунок.

Внешней грани: $\sigma = (1, 2, 3)$, $\alpha = (3, 4)$, $\varphi = (1, 3, 4, 2)$.

3 Обобщенные числа Гурвица

Эта глава посвящена задачам подсчета количества созвездий в некоторых случаях, когда количество перестановок и их циклические типы могут быть произвольными. В такой ситуации, за исключением простейших случаев многочленов на кривых рода 0, полные ответы в задачах перечисления созвездий не получены. В разделе 3.1 мы представляем новое доказательство формулы, перечисляющей разложения перестановки данного циклического типа в произведение r перестановок произвольных циклических типов в специальном случае. Раздел 3.2 посвящен производящим рядам, коэффициенты которых перечисляют разветвленные накрытия. Выписана производящая функция чисел Буске-Мелу-Шеффера и доказано, что она удовлетворяет, так называемой, иерархии КП.

3.1 Разложения перестановки в произведение перестановок

3.1.1 Числа Буске-Мелу-Шеффера

В работе [24] получена формула для количества разложений рода 0 данной перестановки σ_0 фиксированного циклического типа в произведение s перестановок произвольных циклических типов. Мы получили новое доказательство формулы из [24] в случае, когда перестановка σ_0 является полным циклом. Доказательство основано на формуле Гульдена-Джексона из [30], перечисляющей упорядоченные разложения полного цикла в произведение перестановок данных циклических типов.

Полученные результаты позволяют рассчитывать на то, что подобные рассуждения могут иметь дальнейшие обобщения на случаи разложений положительных родов.

В нижеследующих пунктах мы формулируем теоремы Буске-Мелу-Шафера, Гульдена-Джексона и другие факты, на которые будет опираться доказательство.

Формула Гульдена-Джексона.

Пусть $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$ — разбиение числа n длины $l(\mu) = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, записанное в мультипликативной форме. Числа m_i равны количеству частей разбиения μ длины i . Будем говорить, что перестановка σ из симметрической группы S_n имеет циклический тип μ , если ее разложение в произведение непересекающихся циклов имеет m_i циклов длины i . Циклические типы перестановок находятся во взаимнооднозначном соответствии с их классами сопряженности.

Пусть σ_0 — полный цикл из S_n , т.е. перестановка с циклическим типом n^1 , и пусть $N(\mu_1, \dots, \mu_r)$ — число упорядоченных разложений перестановки σ_0 в произведение r перестановок фиксированных циклических типов μ_1, \dots, μ_r . В работе [30] получена следующая формула для чисел $N(\mu_1, \dots, \mu_r)$:

Теорема 3.1 (Гульден–Джексон).

$$N(\mu_1, \dots, \mu_r) = n^{r-1} \prod_{i=1}^r \frac{1}{l(\mu_i)} \frac{l(\mu_i)!}{m_{i1}! \dots m_{in}!}, \quad (10)$$

где m_{ij} — это количество частей разбиения μ_i длины j .

Формула Буске–Мелу–Шеффера.

Каждому разложению перестановки из S_n в произведение перестановок соответствует разветвленное накрытие сферы степени n , определенное однозначно с точностью до топологической эквивалентности. Если группа, порожденная этим набором перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов, то соответствующее накрытие оказывается связным. Род накрывающей поверхности определяется по формуле Римана–Гурвица. Будем говорить, что разложение перестановки в произведение перестановок имеет род g , если соответствующее разветвленное накрытие связно и род накрывающей поверхности равен g .

Обозначим через $b_{\sigma_0}(r)$ количество разложений перестановки $\sigma_0 \in S_n$ фиксированного циклического типа в произведение r перестановок (некоторые из которых могут быть тождественными), удовлетворяющих следующим условиям:

- (а) группа, порожденная этим набором из r перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов;
- (б) соответствующее разветвленное накрытие имеет род 0.

В [24] получена следующая формула для чисел $b_{\sigma_0}(r)$, которые мы будем называть числами Буске–Мелу–Шеффера.

Теорема 3.2 (Буске–Мелу–Шеффер). Пусть перестановка $\sigma_0 \in S_n$ имеет m_i циклов длины i ($i = 1, 2, 3, \dots$), через $l(\sigma_0)$ обозначим количество циклов перестановки σ_0 , тогда

$$b_{\sigma_0}(r) = r \frac{(rn - n - 1)!}{(rn - n - l(\sigma_0) + 2)!} \prod_{i \geq 1} \left(i \binom{ri - 1}{i} \right)^{m_i}. \quad (11)$$

Через $b_n(r)$ обозначим число Буске–Мелу–Шеффера в случае, когда перестановка σ_0 — это полный цикл длины n .

3.1.2 Перестановки фиксированной вырожденности

Вырожденностью $A(\mu)$ разбиения μ называется величина

$$A(\mu) = \sum_{i=1}^n (i-1)m_i.$$

Вырожденностью перестановки из симметрической группы S_n будем называть вырожденность соответствующего разбиения числа n .

Зафиксируем натуральное число r и пусть k_1, \dots, k_r — невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq 0$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n - 1$. Рассмотрим наборы из r перестановок вырожденностей k_1, \dots, k_r , дающих в произведении полный цикл длины n . Отметим, что так как мы рассматриваем разложения полного цикла, то группа, порожденная этим набором из r перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов, а равенство $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n - 1$ позволяет, с помощью формулы Римана–Гурвица, заключить, что соответствующее разветвленное накрытие имеет род 0. Таким образом выполняются условия (а) и (б), сформулированные перед теоремой 3.2. Обозначим число таких наборов через \deg_{k_1, \dots, k_r} .

Лемма 3.3.

$$\deg_{k_1, \dots, k_r} = \frac{1}{n} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \cdots \binom{n}{k_{r-1}} \binom{n}{k_r}. \quad (12)$$

Искомое же число $b_n(r)$ равно сумме чисел \deg_{k_1, \dots, k_r} по всевозможным наборам вырожденностей k_1, \dots, k_r , дающих в сумме $n - 1$. Отметим, что нулевые вырожденности отвечают появлению тождественных перестановок в разложении Буске–Мелу–Шеффера.

Теорема 3.4.

$$b_n(r) = \frac{1}{n} \binom{rn}{n-1}. \quad (13)$$

Заметим, что обозначение \deg_{k_1, \dots, k_r} выбрано не случайно. Эти числа естественно выражаются в терминах степеней ограничения отображения Ляшко–Лойенги на страты дискриминанта в пространстве комплексных многочленов степени n , см. [13]. Более того, все утверждения настоящей главы могут быть доказаны, опираясь на результаты вычислений степеней отображения Ляшко–Лойенги из работы [13], однако получающиеся вычисления чуть более громоздки. Именно геометрическая природа

выполняемых вычислений позволяет надеяться на то, что излагаемый подход допускает распространение на случай накрытий произвольного рода.

Следующий параграф посвящен доказательству основных утверждений, леммы 3.3 и теоремы 3.4.

3.1.3 Доказательства

Рассмотрим упорядоченные разложения полного цикла в произведение r перестановок, лишь одна из которых не является транспозицией. Будем называть такую перестановку вырожденной. Пусть $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$ — циклический тип единственной вырожденной перестановки. По теореме 3.1 число $N(\mu)$ таких разложений равно

$$N(\mu) = n^{r-1} \frac{1}{l(\mu)} \frac{l(\mu)!}{m_1! \dots m_n!}, \quad (14)$$

поскольку все множители в (10), отвечающие транспозициям, равны 1.

Выведем формулу для числа упорядоченных разложений полного цикла в произведение s перестановок при условии, что только одна из них является вырожденной и при этом имеет фиксированную вырожденность k . Будем обозначать число таких разложений через $\deg_k(n)$.

Утверждение 3.5. *Справедливо равенство*

$$\deg_k(n) = \sum_{A(\mu)=k} N(\mu) = n^{r-2} \binom{n}{k}. \quad (15)$$

Представим разбиение $\mu \vdash n$ в виде диаграммы Юнга площади n (части разбиения записываются по строкам). Отрежем от этой диаграммы первый столбец: получится диаграмма площади $\sum_{i=1}^n (i-1)m_i$, т.е. в точности площади k . Заметим, что количества совпадающих частей у разбиения числа n и у полученного разбиения числа k совпадают, за исключением того, что в новом разбиении числа k нет частей длины 1. Поэтому мы будем интерпретировать сумму чисел $N(\mu)$ по всем разбиениям μ числа n вырожденности k как сумму тех же чисел по всем разбиениям $\lambda = 1^{m_2} 2^{m_3} \dots (n-1)^{m_n}$ числа k . Здесь и далее через $|\text{Aut}(\lambda)|$ будем обозначать произведение $m_2! \cdot \dots \cdot m_n!$. Имеем

$$\sum_{\mu \vdash n, A(\mu)=k} n^{r-1} \frac{1}{l(\mu)} \frac{l(\mu)!}{m_1! |\text{Aut}(\lambda)|} = \sum_{\lambda \vdash k} n^{r-1} \frac{1}{l(\mu)} \frac{l(\mu)!}{m_1! |\text{Aut}(\lambda)|}. \quad (16)$$

Заметим, что

$$A(\mu) = \sum_{i=1}^n (i-1)m_i = \sum_{i=1}^n im_i - \sum_{i=1}^n m_i = n - l(\mu),$$

и

$$m_1 = n - k - l(\lambda),$$

поэтому правую часть (16) можно переписать в виде:

$$n^{r-1} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{(n-k)|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{(n-k)!}{(n-k-l(\lambda))!}.$$

Докажем, что

$$\sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{(n-k)|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{(n-k)!}{(n-k-l(\lambda))!} = \frac{1}{n} \binom{n}{k}. \quad (17)$$

Перепишем равенство (17) в виде

$$\sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{(n-k)!}{(n-k-l(\lambda))!} = \binom{n-1}{k}. \quad (18)$$

Преобразуем левую часть равенства (18)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{(n-k)!}{(n-k-l(\lambda))!} &= \sum_{\lambda \vdash k} \frac{l(\lambda)!}{|\text{Aut}(\lambda)|} \frac{(n-k)!}{l(\lambda)!(n-k-l(\lambda))!} = \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} \frac{l(\lambda)!}{|\text{Aut}(\lambda)|} \binom{n-k}{l(\lambda)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Перегруппируем слагаемые в сумме (19) по длине разбиения λ

$$\sum_{l=1}^k \binom{n-k}{l} \sum_{\lambda \vdash k, l(\lambda)=l} \frac{l!}{|\text{Aut}(\lambda)|}.$$

Заметим, что каждому неупорядоченному разбиению числа k на l слагаемых соответствует $\frac{l!}{|\text{Aut}(\lambda)|}$ упорядоченных, а всего неупорядоченных разбиений $\binom{k-1}{l-1}$, поэтому последнее выражение равно

$$\sum_{l=1}^k \binom{n-k}{l} \binom{k-1}{l-1}. \quad (20)$$

Нетрудно увидеть, что выражение (20) равно $\binom{n-1}{k}$. Действительно, $\binom{n-1}{k}$ — это коэффициент при x^k в многочлене $(1+x)^{n-1}$, а сумма (20) — это коэффициент при x^k в произведении двух многочленов $(1+x)^{n-k} \cdot (1+x)^{k-1} = (1+x)^{n-1}$.

Равенство (17), а вместе с ним и утверждение 3.5 доказано.

Доказательство леммы 3.3. Как нетрудно заметить, для доказательства леммы 3.3 достаточно просуммировать числа $N(\mu_1, \dots, \mu_r)$ по всем наборам разбиений $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ вырожденностей $\{k_1, \dots, k_r\}$. Выполним суммирование, воспользовавшись утверждением 3.5.

$$\begin{aligned} \deg_{k_1, \dots, k_r} &= \sum_{\substack{\{\mu_1, \dots, \mu_r\} \\ A(\mu_i)=k_i}} N(\mu_1, \dots, \mu_r) = \\ &= \sum_{\substack{\{\mu_1, \dots, \mu_r\} \\ A(\mu_i)=k_i}} n^{r-1} \prod_{i=1}^r \frac{1}{l(\mu_i)} \frac{l(\mu_i)!}{m_{i1}! \dots m_{in}!} = n^{r-1} \prod_{i=1}^r \sum_{\substack{\mu_i \\ A(\mu_i)=k_i}} \frac{1}{l(\mu_i)} \frac{l(\mu_i)!}{m_{i1}! \dots m_{in}!} = \\ &= n^{r-1} \prod_{i=1}^r \frac{1}{n} \binom{n}{k_i} = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^r \binom{n}{k_i}. \end{aligned}$$

Последнее выражение в точности совпадает с требуемым в утверждении леммы 3.3, доказательство закончено.

Доказательство теоремы 3.4. Напомним, что через $b_n(r)$ мы обозначали количество разложений полного цикла из S_n в произведение r перестановок, некоторые из которых могут быть тождественными. Числа $b_n(r)$ выражаются через вычисленные числа \deg_{k_1, \dots, k_r} следующим образом:

$$b_n(r) = \sum_{k_1, \dots, k_r, k_1 + \dots + k_r = n-1} \deg_{k_1, \dots, k_r},$$

где сумма берется по всем неупорядоченным наборам k_1, \dots, k_r .

Для завершения доказательства теоремы 3.4 нужно доказать, что

$$\sum_{k_1, \dots, k_r, k_1 + \dots + k_r = n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \dots \binom{n}{k_{r-1}} \binom{n}{k_r} = \frac{1}{n} \binom{rn}{n-1}.$$

Домножим обе части этого равенства на n . Справа стоит количество способов выбрать $n-1$ элементов из rn элементов. Заметим, что сумма

слева в точности равна этому количеству, так как рассматриваются всевозможные наборы k_1, \dots, k_r и всевозможные способы их выбора, то есть каждый раз выбирается ровно $n - 1$ элементов из rn . Теорема доказана.

3.2 Производящие ряды обобщенных чисел Гурвица

3.2.1 Производящий ряд чисел Буске-Мелу–Шеффера

В этом разделе мы приводим производящую функцию чисел Буске-Мелу–Шеффера (в разделе 3.1 определены числа Буске-Мелу–Шеффера рода 0, числа старших родов определяются аналогично) и ее разложение по родам. Мы покажем, что производящая функция числа накрытий рода 0 удовлетворяет некоторой системе дифференциальных уравнений. Также мы покажем, что эта производящая функция является специализацией производящей функции из работы [31] и поэтому является τ -функцией для иерархии КП.

Пусть ν_1, \dots, ν_t — длины циклов в разложении перестановки $\sigma \in S_n$ в произведение независимых циклов; $l(\nu) = t$, $n = |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_t$.

Неприводимые представления группы S_n находятся во взаимнооднозначном соответствии с разбиениями $\nu \vdash n$ (см., например, [18, §3]). Мы будем обозначать неприводимые представления так же как и разбиения.

Обозначим через \dim_ν размерность неприводимого представления ν группы $S_{|\nu|}$. Обозначим через $|\text{Aut}(\nu)|$ порядок группы автоморфизмов разбиения ν . Если в разбиении ν d_i частей длины i , ($i = 1, 2, 3, \dots$), то $|\text{Aut}(\nu)| = d_1!d_2!d_3!\dots$

Через $p_i = p_i(x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать симметрические степенные многочлены от n переменных, которые определяются следующим образом

$$p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^i.$$

Через s_ν будем обозначать *многочлен Шура* разбиения ν . Многочлены Шура — это симметрические многочлены от степенных многочленов p_i (см. определение 3.13 ниже).

Определим соответствующий *сдвинутый многочлен Шура* равенством

$$s\hbar_\nu(\hbar, p_1, p_2, p_3, \dots) = s_\nu(p_1, p_2\hbar, p_3\hbar^2, \dots).$$

Для разбиения $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_t\}$ через p_ν будем обозначать произведение $p_\nu = p_{\nu_1} \dots p_{\nu_t}$.

Определение 3.6. *Содержанием* клетки k , которая лежит на пересечении i -ого столбца и j -ой строки диаграммы Юнга, называется разность

$c(k) = j - i$. Для каждой клетки диаграммы Юнга рассмотрим множество клеток, состоящее из нее самой и всех клеток, лежащих в той же строке и правее и в том же столбце и ниже. Это множество называется *крюком* клетки k . *Длиной крюка* $h(k)$ называется количество клеток в этом крюке.

Через $b_{g,\nu,r}$ обозначим количество классов изоморфизма разветвленных накрытий двумерной сферы поверхностью рода g с r точками ветвления произвольных типов ветвления и выделенной точкой ветвления с данным типом ветвления $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_t\}$. Обозначим через S производящую функцию для чисел $b_{g,\nu,r}$, определяемую следующим образом:

$$S(\hbar, p_1, p_2, \dots; r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \vdash n} b_{g,\nu,r} p_{\nu} \hbar^{2g},$$

где $p_{\nu} = p_{\nu_1} p_{\nu_2} \dots$, и род g накрывающей поверхности может быть вычислен с помощью формулы Римана–Гурвица,

$$2 - 2g = 2n - \sum_P (k(P) - 1),$$

где $k(P)$ — порядок ветвления накрытия в точке P (см. параграф 3.2.4).

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 3.7. *Функция S имеет следующее представление:*

$$S(\hbar, p_1, p_2, \dots; r) = \hbar^2 \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} (1 + c(k) \hbar)^r \frac{\dim_{\nu}}{n!} \hbar^{-2n} s \hbar_{\nu} \right). \quad (21)$$

Производящая функция S имеет разложение по родам

$$S(\hbar, p_1, p_2, \dots; r) = S_0(p_1, p_2, \dots; r) + \hbar^2 S_1(p_1, p_2, \dots; r) + \hbar^4 S_2(p_1, p_2, \dots; r) + \dots,$$

где функции S_g , $g = 0, 1, 2, \dots$ — это производящие функции для числа накрытий рода g . Коэффициенты $b_{0,\nu,r}$ функции S_0 это числа Буске-Мелу-Шеффера $b_{\sigma_0}(r)$ (см. предыдущий раздел 3.1), с коэффициентами, обратными $|\text{Aut}(\nu)| \prod_{i=1}^{l(\nu)} \nu_i$, где ν — это циклический типа перестановки

σ_0 . Напомним, что числа Буске–Мелу–Шеффера равны количеству разложений рода 0 данной перестановки σ_0 в то время как числа $b_{0,\nu,r}$ перечисляют разложения произвольной перестановки из заданного класса сопряженности.

Для старших родов уравнение (21) доставляет эффективный способ вычисления коэффициентов разложения. В частности, ниже выписана производящая функции S_1 разложений рода 1 (коэффициент при \hbar^2 ряда (21)) вплоть до накрытий степени 4:

$$\begin{aligned}
S_1(p_1, p_2, \dots; r) = & \frac{1}{48}r(r-1)(r-2)(r-3)p_1^2 + \frac{1}{12}r(r-1)(r-2)p_2 + \\
& \frac{1}{72}r(r-1)(r-2)(4r^3 - 21r^2 + 35r - 20)p_1^3 + \\
& \frac{1}{6}r(2r-3)(r-2)(r-1)^2p_2p_1 + \frac{1}{24}r(3r-5)(r-1)(3r-2)p_3 + \\
& \frac{1}{96}r(r-1)(r-2)(13r^5 - 99r^4 + 297r^3 - 445r^2 + 337r - 105)p_1^4 + \\
& \frac{1}{24}r(r-1)^2(r-2)(26r^3 - 103r^2 + 135r - 60)p_2p_1^2 + \\
& \frac{1}{24}r(r-1)^2(4r-5)(4r^2 - 10r + 5)p_2^2 + \\
& \frac{1}{16}r(r-1)^2(3r-5)(3r-4)(3r-2)p_3p_1 + \\
& \frac{1}{12}r(r-1)(4r-3)(2r-1)(2r-3)p_4 + \dots
\end{aligned}$$

3.2.2 Интегрируемые иерархии

Производящие ряды, перечисляющие накрытия, часто являются решениями интегрируемых иерархий, см., например, [41]. Производящая функция S является специализацией функции из работы [31] и поэтому является решением иерархии КП.

В частности, она удовлетворяет первому из бесконечной серии уравнений иерархии КП:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{\partial^2 S}{\partial p_2^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial p_1^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 S}{\partial p_1^4}.$$

Обозначим через $Y(\nu)$ произведение по содержаниям диаграммы Юнга, соответствующей разбиению ν числа n для неизвестных y_c , $c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$: $Y(\nu) = \prod_{k \in \nu} y_{c(k)}$.

Обозначим через F производящую функцию

$$F(\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots; p_1, p_2, \dots) = \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} y_{c(k)} \frac{dim_{\nu}}{n!} p_{\nu} \right).$$

Следующее утверждение является немедленным следствием теорем 2.3 и 3.1 из [31]:

Утверждение 3.8. *Производящая функция F является решением иерархии КП.*

Рассмотрим возмущенную иерархию КП, полученную из иерархии КП заменой переменных $p_i = \frac{p_i}{\hbar^{i+1}}$, где \hbar — формальный параметр и $i = 0, 1, 2, \dots$. Например, первое уравнение возмущенной иерархии имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_1 \partial p_3} - \frac{\partial^2 S}{\partial p_2^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial p_1^2} - \frac{\hbar^2}{12} \frac{\partial^4 S}{\partial p_1^4}.$$

Следствие 3.9. *Функция $S(\hbar, p_1, p_2, \dots; r)$ является решением возмущенной иерархии КП.*

Доказательство. Функция S получается из функции F подстановкой $y_c = (1 + c\hbar)^r$ и $p_i = \frac{p_i}{\hbar^{i+1}}$. \square

Вычисления с использованием теоремы 3.7 позволяют выдвинуть гипотезу о виде формулы Буске-Мелу-Шеффера в случае род $g = 1$

Гипотеза 3.10. *Число Буске-Мелу-Шеффера для накрытий двумерной сферы тором имеет вид:*

$$b_{1,\nu,r} = P_{2t-1}(r, \nu) r \prod_{i=1}^t (r\nu_i - 2)_{(\nu_i-1)}. \quad (22)$$

Здесь P_{2t-1} — многочлен степени $2t - 1$ и $(r\nu_i - 2)_{\nu_i-1} = (r\nu_i - 2)(r\nu_i - 3) \dots (r\nu_i - \nu_i)$ — нисходящий факториал.

Нам не удалось ни доказать эту гипотезу, ни сформулировать гипотезу о явном виде многочленов $P_k(r, \nu)$.

3.2.3 Групповая алгебра $\mathbb{C}S_n$

Как мы неоднократно упоминали, числа $b_{g,\nu,r}$ перечисляют разложения перестановки $\sigma_0 \in S_n$ данного циклического типа ν в произведение r перестановок при условии, что группа порожденная этим набором из r перестановок, действует транзитивно на множестве из n элементов. Род накрывающей поверхности определяется по формуле Римана-Гурвица.

Определение 3.11. *Групповая алгебра* $\mathbb{K}G$ конечной группы G — это $|G|$ -мерное векторное пространство над полем \mathbb{K} порожденное элементами G . Произведение в $\mathbb{K}G$ индуцировано групповой операцией группы G .

Нас будет интересовать только случай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Все факты про групповую алгебру симметрической группы, собранные ниже, стандартны, их доказательства можно найти, например, в книгах [10] и [15].

Каждое линейное представление $R : G \rightarrow GL(V)$ группы G в векторном пространстве V над \mathbb{C} можно естественным образом продолжить до линейного представления алгебры $\mathbb{C}G$ в том же пространстве формулой $R(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g R(g)$. Отметим, что обратное тоже верно и поэтому существует естественная биекция между представлениями группы G и ее групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

Пусть T — регулярное представление алгебры $\mathbb{C}G$, т.е. представление алгебры $\mathbb{C}G$ на себе, определенное по правилу $T(a)x = ax, \forall a, x \in \mathbb{C}G$.

Стандартным образом определим скалярное произведение в $\mathbb{C}G$:

$$(a, b) = \text{tr } T(ab) = \text{tr } T(a)T(b). \quad (23)$$

Через C_ν обозначим элемент групповой алгебры $\mathbb{C}S_{|\nu|}$, равный сумме всех перестановок циклического типа ν . Элементы C_ν образуют базис центра групповой алгебры $\mathbb{C}S_{|\nu|}$.

Пусть $\mathbb{C}[G]$ — пространство функций на группе G . Следующая формула продолжает каждую функцию $\varphi : \mathbb{C}[G]$ до линейной функции на групповой алгебре $\mathbb{C}G$:

$$\varphi(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g \varphi(g), \quad \varphi \in \mathbb{C}[G]. \quad (24)$$

Равенство (24) доставляет естественную биекцию между $\mathbb{C}[G]$ и двойственным пространством $\mathbb{C}G^*$ к пространству $\mathbb{C}G$.

Биекция между пространством $\mathbb{C}G$ и его двойственным $g \mapsto \varphi_g$ осуществляется с помощью скалярного произведения (23):

$$\varphi_g(h) = (g, h) = \begin{cases} |G|, & gh = e \\ 0, & gh \neq e \end{cases} \quad \forall g, h \in \mathbb{C}G. \quad (25)$$

Следующее равенство переносит скалярное произведение на пространство $\mathbb{C}[G]$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_1(g) \varphi_2(g^{-1}). \quad (26)$$

Пусть $R : G \rightarrow GL(V)$ — произвольное линейное представление группы G .

Определение 3.12. Функция $\chi \in \mathbb{C}[G]$, определяемая равенством $\chi(g) = \text{tr } R(g)$, $g \in G$, называется *характером* представления R .

Через χ^ν будем обозначать характер неприводимого представления группы S_n , отвечающий разбиению $\nu \vdash n$. Характеры χ^ν являются идемпотентами:

$$\chi^\mu \chi^\nu = \frac{\dim_\nu}{n!} \delta_\mu^\nu \chi^\mu.$$

Рассмотрим отображение ψ из группы S_n в пространство квазиоднородных многочленов степени n от переменных p_i , $\psi : \sigma \mapsto p_{\nu_1} \cdots p_{\nu_l}$, где переменная p_i берется с весом i .

Определим *характеристическое отображение* ch из центра групповой алгебры $Z\mathbb{C}S_n^*$ в пространство квазиоднородных многочленов степени n от переменных p_i следующим равенством:

$$\text{ch}(f) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in G} f(g) \psi(g).$$

Определение 3.13. Пусть ν — разбиение длины менее чем $l + 1$, тогда определим *функцию Шура* $s_\nu(x_1, x_2, \dots, x_l)$, отвечающую разбиению ν , как отношение двух определителей:

$$s_\nu(x_1, x_2, \dots, x_l) = \frac{\det(x_i^{\nu_j + l - j})_{1 \leq i, j \leq l}}{\det(x_i^{l - j})_{1 \leq i, j \leq l}}. \quad (27)$$

Поскольку функции Шура являются симметрическими функциями переменных x_1, \dots, x_l , их можно представить как многочлены от степенных переменных $p_i = \sum_{j=1}^l x_j^i$, $i = 1, \dots, l$. Так, функция Шура $s_k(p_1, p_2, \dots)$ одночастичного разбиения — это коэффициент при t^k в ряде $\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i} t^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} s_k t^k$. Функция Шура произвольного разбиения ν — это определитель следующей матрицы, составленной из функций Шура одночастичных разбиений:

$$s_\nu(p_1, p_2, \dots) = \det(s_{\nu_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq l(\nu)}.$$

Утверждение 3.14 ([15], 1.7.3). *Отображение ch доставляет биекцию между центром групповой алгебры $Z\mathbb{C}S_n^*$ и пространством квазиоднородных многочленов степени n : $\text{ch}(\chi^\nu) = s_\nu$.*

В дополнение отметим, что существует естественная биекция между ZCS_n и ZCS_n^* . При этом элемент $C_\nu = C_{\nu_1, \dots, \nu_t} \in ZCS_n$ переходит в моном $|C_\nu| p_{\nu_1} \dots p_{\nu_t}$, где через $|C_\nu|$ мы обозначаем количество перестановок из S_n в классе сопряженности перестановки с циклическим типом ν .

3.2.4 Операторы на центре групповой алгебры ZCS_n

В этом параграфе мы докажем теорему 3.7.

Любой элемент $a \in ZCS_n$ можно разложить по базисам C_ν и χ^ν :

$$a = \sum_{\nu \vdash n} \frac{(a, C_\nu)}{|C_\nu| n!} C_\nu = \sum_{\nu \vdash n} (a, \chi^\nu) \chi^\nu.$$

Воспользовавшись тем, что характеры χ^ν являются идемпотентами, получаем:

$$a \cdot b = \sum_{\nu \vdash n} (a, \chi^\nu) (b, \chi^\nu) \chi^\nu, \quad \forall a, b \in ZCS_n.$$

Сопоставим элементу $a \in ZCS_n$ оператор на центре групповой алгебры ZCS_n , действующий умножением на a . Тогда характеры χ^ν являются собственными векторами такого оператора с собственными числами (a, χ^ν) .

Определим оператор $B : ZCS_n \rightarrow ZCS_n$ формулой

$$B = \sum_{\nu \vdash n} \hbar^{|\nu| - l(\nu)} C_\nu.$$

Другими словами, B — это нормированная сумма всех элементов группы S_n , здесь \hbar — это формальная переменная.

Напомним, что сейчас мы перечисляем наборы из m перестановок, которые в произведении дают перестановку циклического типа ν . Разложим оператор B по собственному базису из характеров и заметим, что собственное значение, соответствующее собственному вектору χ^ν , это в точности искомое количество.

Через B_ν обозначим собственное значение оператора B на собственном векторе χ^ν . Для вычисления B_ν мы будем использовать следующее утверждение:

Лемма 3.15 ([36], 4.1.2). *Функция $\Gamma \in \mathbb{C}[S_n]$, $\Gamma : \sigma_\nu \mapsto \hbar^{l(\nu)}$, где \hbar — формальный параметр и σ_ν — произвольная перестановка циклического типа ν , имеет следующее представление в базисе из характеров:*

$$\Gamma(\cdot) = \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} \frac{\hbar + c(k)}{h(k)} \chi^\nu;$$

здесь k пробегает все множество клеток диаграммы Юнга, соответствующей разбиению ν , $c(k)$ — содержание клетки k , $h(k)$ — длина крюка клетки k .

Для полноты картины воспроизведем здесь доказательство этого утверждения.

Доказательство. По определению (см. [15], 1.7), для произвольной функции $f \in \mathbb{C}[ZS_n]$ верно следующее равенство $\text{ch}(f) = \sum_{\nu \vdash n} z_\nu^{-1} f(\sigma_\nu) p_\nu$, где $z_\nu = 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots \nu_1! \nu_2! \dots$

Рассмотрим производящую функцию $\sum_{n \geq 1} \text{ch}(\Gamma) u^n$ для чисел $\text{ch}(\Gamma)$. По определению функций ch и z_ν получим:

$$1 + \sum_{n \geq 1} \text{ch}(\Gamma) u^n = \sum_{n = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots} \frac{\hbar^{\nu_1 + \nu_2 + \dots} u^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots}}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots \nu_1! \nu_2! \dots} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots$$

Перепишем последнюю сумму более подробно:

$$\sum_{n = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots} \frac{\hbar^{\nu_1 + \nu_2 + \dots} u^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots}}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots \nu_1! \nu_2! \dots} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k u^{nk}}{n^k k!} p_n^k.$$

Далее заметим, что справа стоит экспонента:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k u^{nk}}{n^k k!} p_n^k = \exp \hbar \left(u p_1 + \frac{u^2 p_2}{2} + \frac{u^3 p_3}{3} + \dots \right).$$

Подставим в нее выражение переменных p_i через переменные x_i (см. (3.2.1)):

$$\exp \hbar \left(u p_1 + \frac{u^2 p_2}{2} + \frac{u^3 p_3}{3} + \dots \right) = \exp \hbar \sum_{i=1}^{\infty} \left(u x_i + \frac{(u x_i)^2}{2} + \frac{(u x_i)^3}{3} + \dots \right).$$

Последнюю сумму можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \exp \hbar \sum_{i=1}^{\infty} \left(u x_i + \frac{(u x_i)^2}{2} + \frac{(u x_i)^3}{3} + \dots \right) &= \exp \left(\hbar \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - u x_i) \right) = \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} (1 - u x_i)^{-\hbar}. \end{aligned}$$

Поэтому остается доказать, что

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i)^{-\hbar} = \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} \frac{\hbar + c(k)}{h(k)} \cdot s_{\nu}(x_1, x_2, \dots). \quad (28)$$

Правая часть равенства (28) — это многочлен от \hbar , поэтому достаточно доказать равенство для натуральных значений \hbar . Докажем следующее равенство для $N \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i)^{-N} = \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} \frac{N + c(k)}{h(k)} \cdot s_{\nu}(x_1, x_2, \dots). \quad (29)$$

Воспользуемся двумя утверждениями из [15]. Во-первых,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - u_j x_i)^{-1} = \sum_{\nu} s_{\nu}(u_1, u_2, \dots) s_{\nu}(x_1, x_2, \dots). \quad (30)$$

Связь между левой и правой частями равенства (30) следует из свойств полных симметрических многочленов. Полные симметрические многочлены h_r определяются равенством:

$$h_r(x_1, x_2, \dots) = \sum_{|\nu|=r} \sum_{\tau} x_1^{\nu_{\tau(1)}} x_2^{\nu_{\tau(2)}} \dots x_{l(\nu)}^{\nu_{\tau(l(\nu))}},$$

где второе суммирование производится по всем перестановкам τ частей разбиения ν .

Производящая функция $H(t)$ для многочленов h_r может быть записана в виде $H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}$. Отметим, что мы можем представить каждый сомножитель в правой части как сумму бесконечной геометрической прогрессии. Детали доказательства формулы (30) можно найти в [15], раздел 1.4.

Далее, используя [15], Ч. 1.3, пример 4 получаем:

$$\prod_{k \in \nu} \frac{N + c(k)}{h(k)} = s_{\nu}(\underbrace{1, \dots, 1}_N). \quad (31)$$

Напомним (определение 3.13), что функция Шура $s_{\nu}(x_1, x_2, \dots)$ — это отношение двух определителей. Сделаем замену $x_i = q^{i-1}$, тогда оба определителя станут определителями Вандермонда и

$$s_{\nu}(1, q, q^2, \dots) = q^{n(\nu)} \prod_{x \in \nu} \frac{1 - q^{n+c(x)}}{1 - q^{h(x)}}, \quad (32)$$

где через n мы обозначаем общее количество частей в разбиении ν ,
 $n(\nu) = \sum_{i=1}^n (i-1)\nu_i$.

Далее, при подстановке $t = 1$ выражение $\frac{\prod_{i=1}^k (1-t^i)}{(1-t)^k}$ становится равным $k!$. Следовательно, (31) следует из (32) после подстановки $q = 1$.

Равенство (29) становится очевидным, если положить $u_1 = \dots = u_N = 1$, $u_{N+1} = \dots = 0$ в (30) и использовать (31). Лемма доказана. ►

Следствие 3.16. *Собственное значение B_ν оператора B на собственном векторе χ^ν равно*

$$B_\nu = \frac{\dim_\nu}{n!} \prod_{k \in \nu} (1 + c(k)\hbar).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{\Gamma} : \sigma_\nu \mapsto \hbar^{n-l(\nu)}$. Разложим $\tilde{\Gamma}$ по базису из характеров, воспользовавшись леммой 3.15:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\cdot) &= \sum_{\nu \vdash n} \hbar^n \prod_{k \in \nu} \frac{\frac{1}{\hbar} + c(k)}{h(k)} \chi^\nu = \sum_{\nu \vdash n} \frac{\hbar^n}{\hbar^n} \prod_{k \in \nu} \frac{1 + c(k)\hbar}{h(k)} \chi^\nu = \\ &= \sum_{\nu \vdash n} \frac{\dim_\nu}{n!} \prod_{k \in \nu} (1 + c(k)\hbar) \chi^\nu. \end{aligned}$$

Для вывода последнего равенства мы воспользовались хорошо известной формулой крюков:

$$\dim_\nu = \frac{n!}{\prod_{k \in \nu} h(k)}.$$

Следствие доказано. ►

Доказательство теоремы 3.7.

Рассмотрим производящий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \vdash n} \prod_{k \in \nu} (1 + c(k)\hbar)^r \frac{\dim_\nu}{n!} s\hbar_\nu(\hbar, p_1, p_2, \dots) \hbar^{-2n}$$

от переменных \hbar и p_1, p_2, \dots . Его коэффициенты — это собственные значения оператора B^r на собственных векторах χ^ν , записанных в базисе из

сдвинутых функций Шура. Этот производящий перечисляет как связанные, так и несвязные накрытия. Взятие логарифма позволяет выделить связанные накрытия.

Род накрывающей поверхности определяется по формуле Римана–Гурвица:

$$2g = 2 - 2n + \sum_P (k(P) - 1).$$

Здесь суммирование идет по всем точкам ветвления P из $\mathbb{C}P^1$, и $k(P)$ — это порядок ветвления в точке P . Заметим, что перенормировка функций Шура дает вклад в степень переменной \hbar , в точности равный $\sum_P (k(P) - 1)$ из формулы Римана–Гурвица. Мы дополнительно домножаем на \hbar^{-2n} и на \hbar^2 (см. (21)) для того, чтобы добиться равенства показателей степени переменной \hbar и удвоенного рода накрывающей поверхности.



Список литературы

- [1] Н. М. Адрианов *Классификация примитивных групп вращений плоских ребер*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.3, №4, С.1069-1083 (1997)
- [2] Н. М. Адрианов *Правильные карты с группой автоморфизмов $\mathbf{PSL}_2(q)$* , *УМН*, Т.52, № 4, С.195-196 (1997)
- [3] Н. М. Адрианов, Ю. Ю. Кочетков, А. Д. Суворов, Г. Б. Шабат *Группы Маттье и плоские деревья*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.1, № 2, С.377-384 (1995)
- [4] Н. Я. Амбург *Симметрии графов на поверхностях и алгебраические кривые* Дисс. на соискание степени к.ф.-м.н., Москва, МГУ (2005)
- [5] Б. С. Бычков *Вычисление мегакарт*, *Сиб. Эл. Матем. Изв.*, Т.10, С. 170-179 (2013)
- [6] Б. С. Бычков *О разложении циклической перестановки в произведение данного числа перестановок*, *Функц. анализ и его прил.*, Т.49, В.2, С. 1-6 (2015)
- [7] Б. С. Бычков, Е. М. Епифанов, В. А. Дремов. *Вычисления пар Белого шестиреберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.13, В.6, С.137-148 (2007)

- [8] Б. С. Бычков, Е. М. Епифанов, В. А. Дремов. *Вычисления пар Белого шестиреберных рисунков рода 3 с группой автоморфизмов порядка 2*, *Фундаментальная и прикладная математика*, Т.18, В.6, С.77-89 (2013)
- [9] Г. В. Белый *О расширениях Галуа максимального кругового поля*, *Изв. АН СССР, Сер. Матем.*, Т.43, №2, С.267-276 (1979)
- [10] Э. Б. Винберг *Алгебра*, М., Факториал (1999)
- [11] Е. М. Епифанов *Шестиреберные рисунки рода 3 с единственной вершиной*, *Дипломная работа* (2006)
- [12] А. К. Звонкин, С. К. Ландо *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО (2010)
- [13] Д. Звонкин, С. К. Ландо *О кратностях отображения Ляшко-Лойенги на стратах дискриминанта*, *Функц. анализ и его прил.*, Т.33, В.3, С. 21-34 (1999)
- [14] С. К. Ландо *Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых*, *УМН*, Т.57, №3, С.463-533 (2002)
- [15] И. Макдональд *Симметрические функции и многочлены Холла*, М., Мир (1985)
- [16] А. Д. Медных *Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления*, *Сиб. матем. журн.*, Т.25, С.120-142 (1984)
- [17] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, М.: Изд-во «Факториал Пресс» (2000)
- [18] М. А. Наймарк *Теория представлений групп*, М., Наука (1976)
- [19] В. Фултон *Теория пересечений*, М., Мир (1994)
- [20] Дж. Харрис, Я. Моррисон *Модули кривых. Вводный курс.*, М., Мир, Научный мир (2004)
- [21] Г. Б. Шабат *Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых*, *Дисс. на соискание степени д.ф.-м.н.* Москва, МГУ (1998)

- [22] N. Amburg *Regular unicellular dessins d'enfants and Weil curves*, Formal power series and algebraic combinatorics. Berlin: Springer-Verlag, P.393-401(2000)
- [23] J. Betrema, D. Pere, A. Zvonkin. *Plane trees and their Shabat polynomials*. Catalog, Rapport intern de LaBRI, no. 92-75, Bordeaux (1992)
- [24] M. Bousquet-Melou, G. Schaeffer *Enumeration of planar constellations*, Advances in Applied Math., V.24, I.4, P.337-368 (2000)
- [25] B. Bychkov *On the number of coverings of the sphere ramified over given points*, math.CO/1312.1141 (2013)
- [26] P. Deligne, D. Mumford *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., V.36, P.75-109 (1969)
- [27] S. Diaz, R. Donagi, D. Harbater *Every curve is a Hurwitz space* Duke Math. J., V. 59, №3. P.737-746 (1989)
- [28] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. Math., V.146, P.297-327 (2001)
- [29] M. Fried *Fields of definition of function fields and Hurwitz families — groups as Galois groups*, Comm. Algebra, V. 5, №1. P. 17-82 (1977)
- [30] I. P. Goulden, D. M. Jackson *The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group*, European J. of Combinatorics, V.13, I.5, P.357-365 (1992)
- [31] I. P. Goulden, D. M. Jackson *The KP-hierarchy, branched coverings and triangulations*, Advances in Math., V.219, I.3, P.932-951 (2008)
- [32] A. Grothendieck *Esquisse d'un programme* (1984)
- [33] J. Harris, D. Mamford *On the Kodaira dimension of the moduli spaces of curves, with an appendix by William Fulton*, Invent. Math., V.67, P.23-88 (1982)
- [34] A. Hurwitz *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., V. 39. P. 1-61 (1891)
- [35] P. Johnson *Double Hurwitz numbers via the infinite wedge*, arXiv:1008.3266

- [36] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*, Invent. Math., V.158, no. 3, P.551-642 (2004)
- [37] Y. Y Kochetkov *Trees of diameter 4*, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, P.447-453 (2000)
- [38] S. Lando, D. Zvonkine *Counting ramified coverings and intersection theory on spaces of rational functions. I. Cohomology of Hurwitz spaces*, Mosc. Math. J., 7:1, 85–107 (2007)
- [39] E. Looijenga *The complement of the bifurcation variety of a Simple Singularity*, Invent. Math., V.23, P.105-116 (1974)
- [40] A. D. Mednykh *Branched coverings of Riemann surfaces whose branch orders coincide with the multiplicity*, Comm. Algebra, V.18, no. 5, P.1517-1533 (1990)
- [41] A. Okounkov *Toda equation for Hurwitz numbers*, Math. Res. Lett. 7, no. 4, 447- 453 (2000)
- [42] G. B. Shabat *On a class of families of Belyi functions*, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, P.575-580 (2000)
- [43] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky *Drawing curves over number fields*, The Grothendieck Festschrift. Birkhauser, III, P.199-227 (1990)
- [44] G. B. Shabat, A. Zvonkine *Plane trees and algebraic numbers*, Contemporary Mathematics. AMS, V.178, P.233-275 (1994)
- [45] S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine *On double Hurwitz numbers with completed cycles*, Journ. of the London Math. Soc., V.86, I.2, P.407-432 (2012)
- [46] H. Weyl *Über das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart*, Comment. Math. Helv., V.3, P.103-111 (1931)
- [47] A. Zvonkin *Megamaps: Construction and Examples*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Conference edition: Discrete Models: Combinatorics, Computation and Geometry, P. 329-339 (2001)