

Аспирантская Школа по математике НИУ ВШЭ
Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

8 октября 2015 г.

(продолжительность экзамена 4 часа)

1. Рассмотрим многочлен $e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Докажите, что все его нули вещественны и положительны.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Существует ли такая невырожденная матрица T над полем \mathbb{C} , что $T^{-1}AT = B$?

3. Докажите, что любое счётное замкнутое подмножество действительной прямой содержит изолированную точку.

4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx.$$

5. Случайный эксперимент содержит несколько шагов. На первом мы подбрасываем монету. Если выпадает «Г» (герб), то останавливаемся. Если «Р» (решётка), то начинаем бросать игральную кость до первого появления шестёрки.

а) Построить вероятностное пространство.

б) Пусть X представляет полное число шагов в эксперименте. Найти математическое ожидание, дисперсию и производящую функцию случайной величины X .

6. а) Для каких вещественных k краевая задача на функцию $u(x)$, $x \in [0, 1]$:

$$u'' + k^2 u = f(x), \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

разрешима для любой непрерывной функции $f(x)$?

б) Выпишите решение этой краевой задачи по заданной непрерывной функции $f(x)$.

7. Пусть x_n – n -ый положительный корень уравнения $x \sin x = 1$. Найдите первые два нетривиальных члена асимптотики x_n при $n \rightarrow \infty$.

8. Операторы A и A^\dagger действуют в гильбертовом пространстве \mathcal{H} и взаимно сопряжены относительно заданного на \mathcal{H} эрмитова скалярного произведения. Известно, что A и A^\dagger удовлетворяют соотношению $AA^\dagger - \alpha A^\dagger A = \text{id}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и что существует вектор $\Psi_0 \in \mathcal{H}$: $A\Psi_0 = 0$, $\|\Psi_0\| = 1$, где $\|\cdot\|$ – норма, отвечающая эрмитову скалярному произведению. Определите нормы векторов $\Psi_k = (A^\dagger)^k \Psi_0$, $k = 1, 2, \dots$.