Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор
_____________С.Ю. Рощин

Одобрено на заседании
Академического совета
Аспирантской школы по….наукам
Протокол № 14 от 28 марта 2016

Согласовано

Академический директор
Аспирантской школы по математике

____________/ А.Г.Горинов/

ПРОГРАММА

вступительного испытания по специальной дисциплине
для поступающих на обучение по программам подготовки
научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление – 01.06.01 Математика и механика

Профиль (направленность) - 01.01.04 Геометрия и топология

Москва, 2016

1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

2. Структура вступительного экзамена

Форма проведения испытания: очная.

Структура вступительного экзамена:

Экзамен состоит из письменной и устной части. Письменная часть оценивается по 10 балльной шкале. Итоговая оценка выставляется комиссией на основе оценки за письменную часть и результатов устного экзамена.

Оценка уровня знаний (баллы):
Каждый вопрос оценивается по десятибальной шкале. Итоговая оценка выставляется по 5-бальной шкале по следующему принципу пересчета:
"Отлично" - 8-10 баллов (по 10-балльной шкале);
"Хорошо" - 6-7 баллов (по 10-балльной шкале);
"Удовлетворительно" - 4-5 баллов (по 10-балльной шкале);
"Неудовлетворительно" - 0-3 балла (по 10-балльной шкале).

Критерии оценивания

	Баллы
Ответ полный без замечаний, продемонстрировано рабочее знание предмета.	10-8
Ответ полный, с незначительными замечаниями	6-7
Ответ не полный, существенные замечания	4-5
Ответ на поставленный вопрос не дан	0-3

Невыполнение одного из заданий (или отказ от его выполнения) является, как
правило, основанием для выставления неудовлетворительной оценки за кандидатский экзамен в целом.

3. Содержание

Поступающие в аспирантуру факультета математики должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощиинтегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература.

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).
В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).
В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997
Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999
О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010
И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций
http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf
В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007
А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997
Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА (ЗАДАНИЙ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА)

Факультет математики ГУ-ВШЭ
Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

12 октября 2010 г.

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. Группа G всех целочисленных векторов на плоскости относительно сложения содержит подгруппу H, состоящую из векторов с четными координатами, сумма которых делится на 3. Найдите разложение факторгруппы G/H в прямую сумму циклических групп.

2. Перечислите все группы порядка 35 с точностью до изоморфизма.

3. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем из q элементов. Сколько существует пар векторных подпространств (ℓ, Π), где $\ell \subset \Pi \subset V$, и $\dim \ell = 1$, $\dim \Pi = n - 1$?

4. Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие точке в $\mathbb{R}^n$ ее предмаксимальную по величине координату. Пусть I – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ (множество точек, все координаты которых заключены между нулем и единицей). Найдите интеграл функции φ по I.

5. Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Существует ли голоморфное отображение $f\colon U \to U$, для которого $f(0) = 1/3$ и $f(1/3) = 3/4$?

6. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0.$$

7. Существует ли такое компактное метрическое пространство X, состоящее из более чем одной точки, что X гомеоморфно $X \times X$?