Министерство образования и науки Российской Федерации

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

01.01.04 «Геометрия и топология»

по физико-математическим наукам

Программа-минимум

содержит 10 стр.

2007

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: геометрия (в том числе дискретная), общая, алгебраическая и дифференциальная топологи по разделам: геометрия многообразий и различных геометрических структур; дискретная и комбинаторная геометрия; дифференциальная геометрия и ее приложения; интегральная геометрия; симплектическая, контактная и пуассонова геометрия конечномерных и бесконечномерных пространств; общая топология; алгебраическая топология; топология гладких многообразий; маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений; топология особенностей; теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур; топология и геометрия групп и однородных пространств.

Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии по математике и механике при участии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова.

1. Общая топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории [7, 12, 24].

Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k-топология в пространстве гладких отображений) [7, 12, 24, 26].

Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций [7, 12, 24].

Примечание: здесь и далее в скобках указаны номера из списка рекомендуемой литературы

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха-Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве [7, 12, 24, 26].

Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами [7].

Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности [7].

Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность [31].

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для k меньших или равных n [1, 3, 4].

Пространства Эйленберга-Маклейна. Н-пространства и группа гомотопических классов отображений в Н-пространство. Коммутативность фундаментальной группы Н-пространства [1, 3, 4].

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Двойственность Пуанкаре для многообразий [1, 3, 4, 19].

Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна [1, 3, 4].

Кольцо когомологий Н-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел [1, 3, 4].

Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана [8, 3].

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей [1, 3, 4].

Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения) [3].

Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца [6].

Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях [1, 3, 4, 8].

Характеристические классы векторных расслоений [8].

Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор [3, 4, 28].

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий [1, 13].

Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа [1, 3, 21].

Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре [1].

Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления. [3, 4].

Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции [6].

4. Топология малых размерностей

Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий [3, 9, 21].

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы [1, 11, 21, 22].

Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия [1, 11, 21].

Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли [1, 2, 21].

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре [1, 15, 21].

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами [1, 2, 21].

Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера-Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической [1, 21].

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки [1, 2, 13].

Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Характеристические числа [8, 15].

Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма [1, 2, 8].

Проективная двойственность и преобразования Лежандра [5, 11].

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур [15].

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем [5, 1].

Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса [4, 5].

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы U(n)/O(n) и U(n)/SO(n). Компактные группы Ли и биинвариантная метрика [14, 1, 22, 25].

Кольцо когомологий компактной группы Ли [1]. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли [27].

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне [16]. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости [10].

Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней [11, 30, 29].

Основная рекомендуемая литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Части 1 (Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей), 2 (Геометрия и топология многообразий) и 3 (Методы теории гомологий). — М.: Наука, 1986, 1984. (Части 1 и 2 переизданы в М.: Эдиториал УРСС, 1998.)

2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. — М.: МЦНМО, 2003.

3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

4. Новиков С.П. Топология. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Том 1, 2. — М.: Наука, 1982, 1984.

7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

8. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.

9. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. — М.: Изд-во МЦНМО, 1997.

10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

11. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. — М., Наука, 1966.

Дополнительная литература

1. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981.
2. Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
3. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. — М.: Наука, 1988.
4. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. — М.: Иностранная Литература, 1961.
5. Роджерс К. Укладки и покрытия. — Мир, М., 1968.

6. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
7. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972.
8. Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. — М.: Мир, 1969.
9. Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.
10. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2000.
11. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
12.. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Том 1,2. — М.: Наука, 1981.
13. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрий. — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
15. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии, Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
16. Пресли А., Сигал Г., Группы петель. — М.: Мир, 1990.
17. Атья М. Лекции по K-теории, — Мир, 1967.
18. А.Д. Александров. Выпуклые многогранники. — Изд-во Технико-Теоретической литературы. М., Л., 1950.
19. Л.А. Люстерник. Выпуклые фигуры и многогранники. — Изд-во Технико-Теоретической литературы. М., Л., 1956.
20. Федер Е. Фракталы. — Мир, М., 1991.