НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Предложение по способу ускорения вычисления управления, синтезированного SDRE-методом, на некотором классе динамических систем

Семион Александр
Аспирант 2-ого года обучения
spin7ion@gmail.com

Научный руководитель:
д.т.н. Афанасьев В.Н.

LQR

Для линейной системы

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = A\vec{X} + B\vec{U}$$

Вводится квадратичный функционал качества

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)dt$$

Тогда оптимальное управление описывается как $U(t) = -R^{-1}B^T SX(t)$

Здесь S – решение уравнения Риккати

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

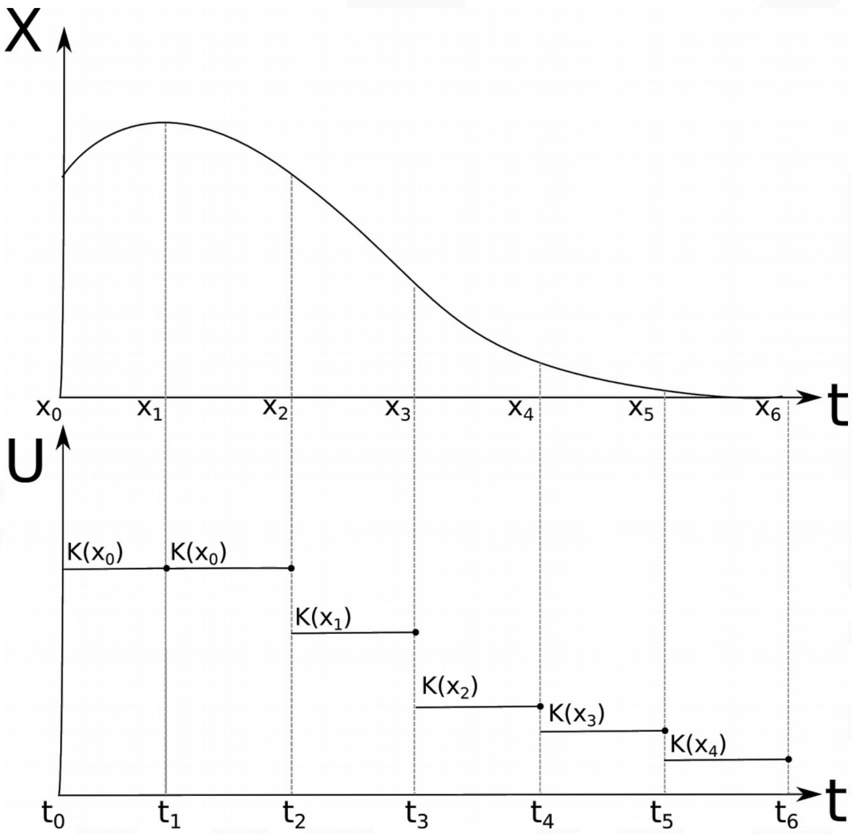
Проблемы синтеза регуляторов

LQR предполагает, что задача управления поставлена для линейной системы
Большинство реальных систем нелинейны
При линеаризации теряется информация о нелинейной составляющей динамики

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{X} = f(\overrightarrow{X}) + B(\overrightarrow{X})\overrightarrow{U}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = A(X)\vec{X} + B(X)\vec{U}$$

Система линеаризуется состоянием в отдельные дискреты времени в реальном времени
Величина дискрета зависит от скорости вычисляющего устройства
Коэффициенты управления начинают вычисляться в начале дискрета на основе текущего состояния. До этого используются коэффициенты, вычисленные в прошлом дискрете



SDRE

Введем квадратичный функционал и используем SDC подход

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ y^T(t) \cdot Q \cdot y(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t) \right\} dt$$

Управление

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(X_i)X(t)$$

$S(X_i)$ решение уравнения Риккати

$$A(X_i)^T S(X_i) + S(X_i)A(X_i) - S(X_i)BR^{-1}B^T S(X_i) + Q = 0$$

Пути решения

Онлайн решение

Хранение всех возможных коэффициентов в памяти

Кватернионы

4 параметра, характеризующие ось поворота
и угол поворота вокруг оси.

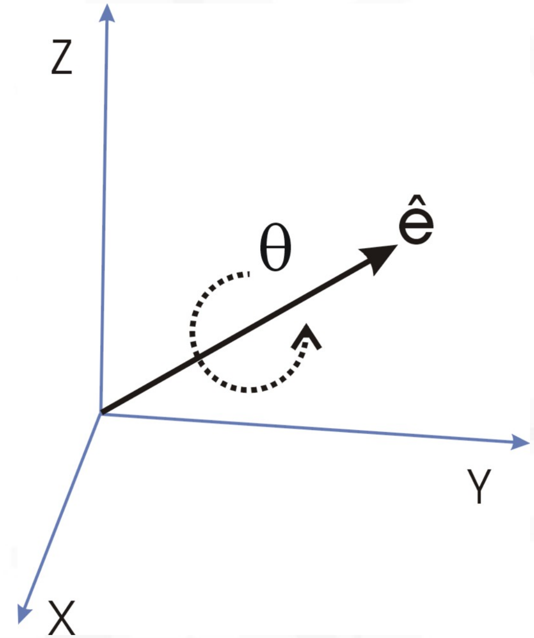
$$a + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$$

$$\vec{i}\vec{j}\vec{k} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1$$

Преимущества

Для получения конечного поворота из 2ˣ необходимо меньше вычислительных ресурсов

Интегрирование скорости поворота производится быстрее



Недостатки

Неоптимальность представления с точки зрения количества параметров

Не подвержен проблеме “шарнирного замка”

Неочевидность представления

* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. — Москва Издательство "Наука", 1973.

Ограниченность пространства состояний

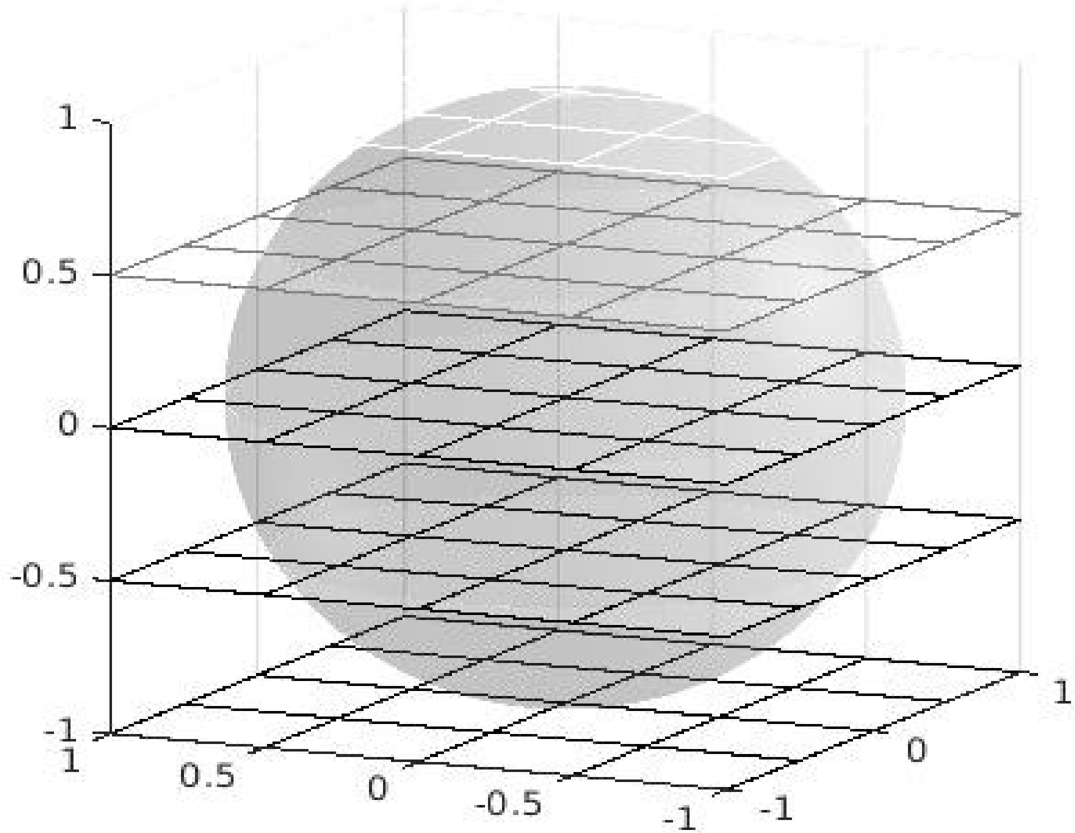
Компоненты нормированного кватерниона ограничены [-1; 1]

Угловые скорости возможно ограничить разумными пределами

Пространство состояний ограничено

Вычислитель имеет определенную точность

Кватернион в памяти



Кватернион в памяти

Точность по компонентам кватерниона	Количество вариантов
0.1	4139
0.01	4187707
0.001	4188780761

Хранение коэффициента управления

Управление

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(X_i)X(t)$$

$S(X_i)$ решение уравнения Риккати

$$A(X_i)^T S(X_i) + S(X_i)A(X_i) - S(X_i)BR^{-1}B^T S(X_i) + Q = 0$$

$R^{-1}B^T S(X_i)$ имеет размер 3x6

В соответствии со стандартом IEEE.754 тип данных float занимает 4 байта

Хранение 1 коэффициента управления занимает 72 байта

Занимаемая память

Точность	Необходимое количество памяти без учета угловых скоростей	Необходимое количество памяти с учетом угловых скоростей
0.1	291КБ	113.96МБ
0.01	287.547МБ	112ГБ
0.001	280ГБ	110ТБ

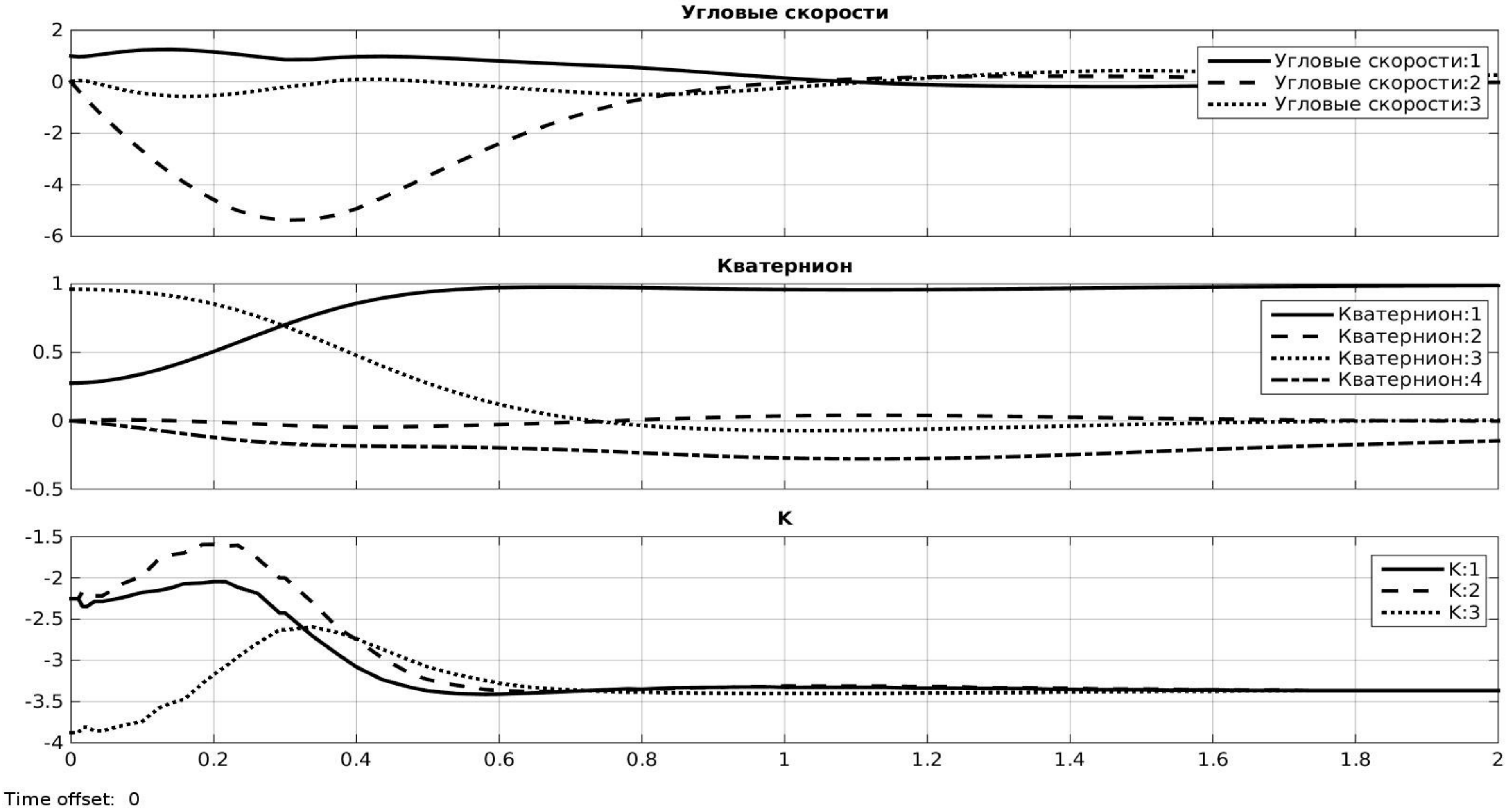
Ссылки многосвязного списка занимают 24байта. Что, при точности 0.01, занимает 95.8МБ памяти.

Оценка скорости

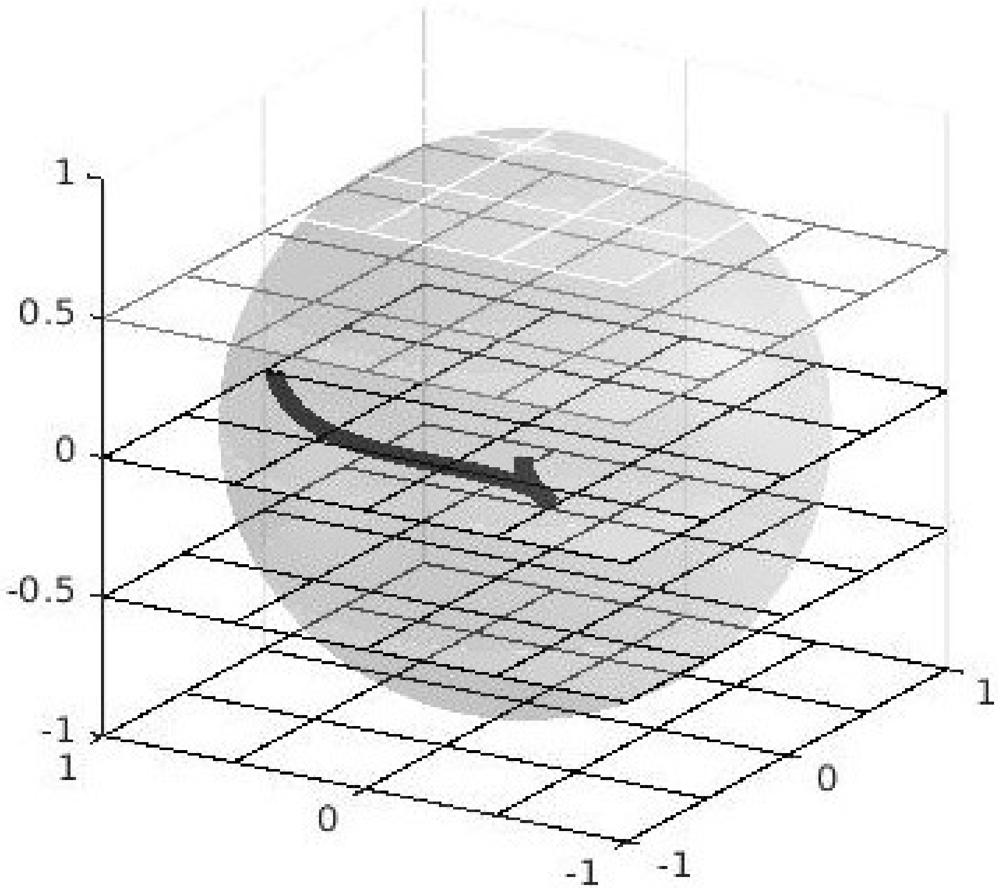
- Предположим, что за один такт состояние изменилось с $(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)^T$ на $(0\ 0\ 0\ -1\ -1\ -1)^T$
- Точность вычислителя 0.01.
- Необходимо пройти по 603 указателям.
- Необходимо считать 43КБ.
- Скорость чтения 30МБ/с.
- Без учета времени, затрачиваемого на операции сравнения, время получения новой матрицы составляет 1.4мс.
- При онлайн решении затрачивается 14мс [1]

1. Alexander Bogdanov , Magnus Carlsson, Geoff Harvey, John Hunt, Dick Kieburtz, Rudolph van der Merwe, Eric Wan STATE-DEPENDENT RICCATI EQUATION CONTROL OF A SMALL UNMANNED HELICOPTER // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit Austin, Texas 11-14 August 2003

Математическое моделирование



Текущая ячейка



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо
за внимание!

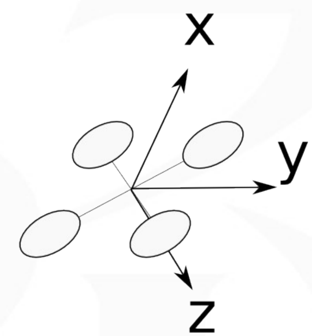
spin7ion@gmail.com

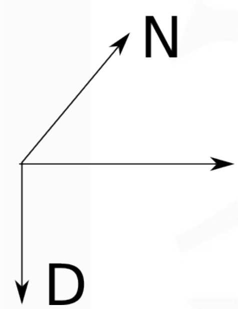
Математическая модель квадрокоптера

Порядок построения математической модели летательного аппарата

Вводятся 2 системы координат: локальная (N(orth)E(ast)D(own)) и связанная
Вводятся 4 силы винтомоторных групп
Описываются дифференциальные уравнения угловых скоростей
Вводится кватернион, описывающий вращение
Дифференциальное уравнение компонент кватерниона выводится из свойств кватерниона:

$$\dot{\vec{\lambda}} = \frac{1}{2}\vec{\lambda} \circ \vec{\omega}$$





$$\begin{cases} \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \frac{U_2}{I_x} \\ \frac{U_3}{I_y} \\ \frac{U_4}{I_z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{I_z - I_y}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} \\ \frac{I_x - I_z}{I_y}\dot{\phi}\dot{\psi} \\ \frac{I_y - I_x}{I_z}\dot{\phi}\dot{\theta} \end{pmatrix} & , \\ \dot{\vec{\lambda}} = \frac{1}{2}\vec{\lambda} \circ \vec{\omega} & , \end{cases}$$