Хеджирование российских акций с помощью модели многомерной стохастической волатильности

Лакшина Валерия Владимировна
Старший преподаватель
Аспирант
Кафедра математической экономики
НИУ ВШЭ
Нижний Новгород

Хеджирование является одной из самых распространённых задач в финансах и требует знаний о распределении доходностей хеджирующего и хеджируемого активов, т. е. о многомерном распределении, или, как минимум, о первых двух моментах этого распределения. Мы хотим сосредоточиться на моделировании второго момента, поскольку именно вариационно-ковариационная матрица нужна для решении вышеупомянутых финансовых задач.

Можно выделить два основных подхода к моделированию волатильности: модели обобщённой авторегрессионной условной гетероскедастичности GARCH (обзор многомерных моделей GARCH см. в (Bauwens, Laurent и Rombouts 2006)) и модели стохастической волатильности (СВ) (обзор многомерных моделей СВ см. в (Asai, McAleer и Yu 2006)). Вторые непосредственно учитывают изменчивость волатильности, моделируя ее как случайный процесс, что видится предпосылкой, более соответствующей эмпирическим данным. Но, при использовании СВ возникают две основных сложности — проблема размерности и проблема оценивания. Первая проблема актуальна и для GARCH. Ее суть в том, что число оцениваемых параметров модели растёт квадратично (а иногда и быстрее, например, в VECH модели Engle и Kroner (1995)) относительно количества активов в портфеле.

Вторая сложность, возникающая при использовании СВ, — оценивание. В противоположность GARCH, модель СВ, содержащая два источника неопределённости, в большинстве случаев не позволяет аналитически вывести функцию правдоподобия для оценки параметров. Но существует ряд способов для оценки СВ методом максимального правдоподобия: функция правдоподобия может быть аппроксимирована гауссовской плотностью (см., например, (Цыплаков 2010)), найдена с помощью симуляций (см., например, (Danı́elsson 1998; Kleppe, Yu и Skaug 2010)) и др.

В данной работе предпринята попытка сформулировать такую многомерную модель стохастической волатильности, в которой для обеих вышеуказанных проблем предложено решение, и применить её для решения конкретной задачи хеджирования акций.

Предложена многомерная модель стохастической волатильности, в которой случайное слагаемое подчиняется закону распределения с тяжёлыми хвостами, а именно распределению Стьюдента. Благодаря тому, что распределение Стьюдента представимо в виде смеси нормальных распределений, его удобно использовать в моделях стохастической волатильности. Действительно, пусть есть портфель из n активов с историей наблюдений длины T. Обозначим логарифмические доходности портфеля в момент времени t как x_t, $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})^\intercal$, где $^\intercal$ означает транспонирование, $x_{it} = ln\frac{P_{it}}{P_{i(t-1)}}$, P_{it} — цена i-го актива в момент времени t, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. Представим x_t как сумму условного математического ожидания и остатков y_t (1).

$$x_t = E\left(x_t|\mathcal{F}_t\right) + y_t \tag{1}$$

Для моделирования волатильности интерес представляют остатки y_t. Предположим, что остатки y_t условно на волатильность Σ_t распределены нормально с нулевым средним (2).

$$y_t|\Sigma_t \sim N\left(0, \Sigma_t\right) \tag{2}$$

При этом Σ_t также представляет собой случайный процесс и имеет обратное распределение Уишарта (3).

$$\Sigma_t \sim IW(\nu, H_t) \tag{3}$$

Используя свойства сложных распределений, получим (4).

$$y_t \sim \mathcal{T}\left(\nu, 0, H_t\right), \tag{4}$$

где $\mathcal{T}\left(\nu, 0, H_t\right)$ — многомерное распределение Стьюдента с ν степенями свободы, нулевым средним и дисперсией H_t (Dawid 1981).

Используя тот факт, что распределение Стьюдента представимо в виде смеси нормальных распределений, Zellner (1976) представил сопряжённые с данной функцией правдоподобия распределения при фиксированном числе степеней свободы ν для одномерного случая. Тогда априорным распределением для волатильностей является распределение Фишера со степенями свободы $n - k$ и ν, где k — число параметров. Согласно Dickey (1967), обобщением распределения Фишера является многомерное бета-распределение (Olkin и Rubin 1964), которое выступает априорным распределением матрицы H_t в (3).

В работе приведены оценки параметров данной модели для восьми акций российских компаний, торгующихся одновременно на РТС и РТС FORTS, по ценам за период с 1 января 2007 г. по 1 октября 2014 г. Рассчитан динамический коэффициент хеджирования для пар «акция-фьючерс» и проведено сравнение эффективности полученной стратегии хеджирования с аналогичной стратегией, основанной на использовании многомерных моделей GARCH типа.

Список литературы

Цыплаков, Александр (2010). «Сделать тайное явным: искусство моделирования с помощью стохастической волатильности». *Квантиль* 8, с. 69—122.

Asai, Manabu, Michael McAleer, and Jun Yu (2006). "Multivariate stochastic volatility: a review". *Econometric Reviews* 25.2-3, p. 145–175.

Bauwens, Luc, Sébastien Laurent, and Jeroen VK Rombouts (2006). "Multivariate GARCH models: a survey". *Journal of applied econometrics* 21.1, p. 79–109.

Danı́elsson, Jón (1998). "Multivariate stochastic volatility models: estimation and a comparison with VGARCH models". *Journal of Empirical Finance* 5.2, p. 155–173.

Dawid, A Philip (1981). “Some matrix-variate distribution theory: notational considerations and a Bayesian application”. *Biometrika* 68.1, p. 265–274.

Dickey, James M (1967). “Matricvariate generalizations of the multivariate t distribution and the inverted multivariate t distribution”. *The Annals of Mathematical Statistics* 38.2, p. 511–518.

Engle, Robert F and Kenneth F Kroner (1995). “Multivariate simultaneous generalized ARCH”. *Econometric theory* 11.01, p. 122–150.

Kleppe, Tore Selland, Jun Yu, and Hans J Skaug (2010). “Simulated maximum likelihood estimation of continuous time stochastic volatility models”. *Advances in Econometrics* 26, p. 137–161.

Olkin, Ingram and Herman Rubin (1964). “Multivariate beta distributions and independence properties of the Wishart distribution”. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 261–269.

Zellner, Arnold (1976). “Bayesian and non-Bayesian analysis of the regression model with multivariate Student-t error terms”. *Journal of the American Statistical Association* 71.354, p. 400–405.