МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"

Верхняя и нижняя границы урезанной цены в задаче об оптимальной остановке (дискретное время, конечный горизонт)

Аспирант 4 г.о.: Ясонов Е.В.
Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Хаметов В.М.

Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
Сентябрь 2017

План выступления

1. Классическая постановка
2. Основные результаты классической постановки
3. Игровая постановка
4. Основные результаты игровой постановки
5. Заключение

Классическая постановка

Обозначения

Пусть:
i) $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathsf{P})$ - стохастический базис;
ii) $N \in \mathbb{N}^+$ - горизонт, $\mathbb{N}_0 := \{0, \ ..., \ N\}$;
iii) $\mathcal{T}_n^N$ - множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, принимающих значения из множества $\mathbb{N}_n = \{n, ..., N\}$;
iv) $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ - согласованная последовательность ограниченных случайных величин (f_n имеет смысл функции полезности);
v) $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$ - множество всех P-п.н. ограниченных $\mathcal{F}_n$-измеримых случайных величин, где $n \in \mathbb{N}_0$.

Классическая постановка задачи

$$\mathsf{E}[f_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_0] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \tag{1}$$

Задачу (1) называют задачей об оптимальной остановке ([Ширяев «Статистический последовательный анализ»]).

Решение задачи (1)

Обозначим $v_0^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \mathsf{E}[f_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_0]$.

Определение 1. Пару $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in (\mathcal{T}_0^N, \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0))$ такую, что $v_0^N = \mathsf{E}[f_{\tau^* \wedge N} | \mathcal{F}_0]$ P-п.н., будем называть решением задачи (1), при этом: i) момент остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_0^N$ назовем оптимальным; ii) $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину v_0^N - ценой оптимальной остановки.

Для любого $n \in \{1, ..., N\}$ обозначим $v_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}[f_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n]$.

Определение 2. Для любого $n \in \{1, ..., N\}$ случайную величину v_n^N называют урезанной ценой оптимальной остановки в момент времени n.

Применение 1. Задача о продаже дома

- Ежедневно приходят предложения о покупке дома.
- X_n - величина предложения, полученного в n-ый день.
- За получение каждого предложения необходимо платить фиксированную стоимость $c > 0$.
- В каждый момент времени необходимо решать: соглашаться с предложением и продавать дом или же продолжить наблюдать.
- Необходимо выбрать такое предложение, которое максимизирует прибыль от продажи дома.

$$f_0 = 0, \quad f_n(x_1, ..., x_n) = x_n - nc, \; n = 1, 2, ...$$

Применение 2. Задача обнаружения разладки

- В каждый момент времени до некоторого момента T приходят наблюдения X_i из известного распределения F_1
- В момент времени T последовательность X_i меняется на последовательность Y_i, имеющую распределение F_2
- Необходимо за минимальное время установить, в который произошла разладка, с минимальным количеством ложных "тревог"
- За наблюдение устанавливается плата

Другие применения

- Задача о свободной границе (Стефана)
- Задача расчёта опциона американского типа.

Обзор результатов по теории оптимальных правил остановки

В работах Де Гроот «Оптимальные статистические решения», Роббинс, Сигмунд, Чао «Теория оптимальных правил остановки», Фельмер, Шид «Введение в стохастические финансы. Дискретное время», Ширяев «Основы стохастической финансовой математики» и др. рассматривается последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и предполагается, что последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – последовательность ограниченных случайных величин. В них без должного обоснования предполагается, что последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ удовлетворяет рекурентному соотношению

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}, \quad v_n^N|_{n=N} = f_N, \tag{2}$$

которую называют огибающей Снелла.

Обзор результатов

В этих работах доказывается, что последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ является супермартингалом, а также утверждение о том, что момент остановки, определяемый соотношением

$$\tau^* = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : f_n = v_n^N\right\} \tag{3}$$

является оптимальным, то есть для любого $n \in \mathbb{N}_0$ P-п.н.

$$v_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_n]. \tag{4}$$

В работе BOYARCHENKO, LEVANDORSKII «Non-Gaussian Merton-Black-Scoles Theory» без должного обоснования предполагается, что область остановки отделяется от области продолжения наблюдений одной точкой. В этом предположении для решения уравнения (2) используется метод Виннера-Хопфа. Забегая вперёд отметим, что приводимые в докладе примеры показывают, что это предположение в случае конечного горизонта вообще говоря не имеет места.

Обзор результатов

В работе KUKUSH, SILVESTROV «Optimal pricing of American type options with descrete time» для конечного горизонта установлены условия, обеспечивабщие единственность оптимального момента остановки.
В работе FERGUSON «Optimal Stopping and Applications» содержутся 17 примеров, которые допускают аналитическое решение задачи об оптимальной остановке с дискретным временем и конечным горизонтом.

Сформулируем основные утверждения данной работы.

Рекуррентное соотношение для урезанной цены оптимальной остановки

Теорема 1. Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||f_n||_{\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{F}_n)} \leq C$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место оценка $|v_n^N| \leq C$ P-п.н.

Замечание. Теорема 1 устанавливает ограниченность урезанной цены в задаче об оптимальной остановке.

Теорема 2. Согласованная последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ является последовательностью урезанных цен тогда и только тогда, когда она удовлетворяет рекуррентному соотношению P-п.н.

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}, \quad v_n^N|_{n=N} = f_N. \tag{5}$$

Замечания к теореме 2

Замечание 1. Доказательтво достаточности условий в формулировке теоремы 2 было известно ранее ([Фельмер, Шид «Введение в стохастические финансы. Дискретное время»]). Доказательство необходимости приводится впервые ([Хаметов, Шелемех, Ясонов «Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом»]).

Замечание 2. Предположение об ограниченности элементов последовательности $\{f_n\}$ в утверждении теоремы 2 носят технический характер (чтобы не формулировать громоздкие условия равномерной интегрируемости). Поэтому в качестве последовательности $\{f_n\}$ можно использовать равномерно-интегрируемые или ограниченные семимартингалы.

Теорема 3. Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||f_n||_{\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{F}_n)} \leq C$. Тогда последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ является супермартингалом.

Критерий оптимальности момента остановки

Очевидно существование оптимального момента остановки. Возникает вопрос: «Как его вычислить?»

Теорема 4. Момент остановки τ^* оптимален тогда и только тогда, когда
$\tau^* = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : f_n = v_n^N\right\}$. P-п.н.

Теорема 5. Пара $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in (\mathcal{T}_0^N, \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0))$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда выполняются условия:
1) последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq \tau^* \wedge N}$ - мартингал относительно меры P;
2) $v_n^N|_{n=\tau^* \wedge N} = f_{\tau^* \wedge N}$

Замечание. Теорема 5 даёт критерий существования решения задачи (1).

Алгоритм решения задачи (1)

Теоремы 1-5 позволяют описать алгоритм постоения решения задачи (1), которая является сложной математической задачей в силу следующего обстоятельства. Необходимо построить две области: область остановки, область продолжения момента наблюдения в каждый момент времени $n \in \mathbb{N}_0$.

Описание алгоритма.
Пусть на шаге N $v_N^N = f_N$. Затем для каждого $n = N-1, ..., 0$ последовательно вычисляются:
1) математическое ожидание $\mathsf{E}[v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]$;
2) оптимальный момент остановки
$\tau^* = \min\left\{n \le k \le N : f_k \ge \mathsf{E}\left[v_{k+1}^N | \mathcal{F}_k\right]\right\}$;
3) цена оптимальной остановки
$v_n^N = 1_{\{\tau^* = n\}} f_n + 1_{\{\tau^* > n\}} \mathsf{E}[v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]$.
Затем операции, описанные в пунктах 1) - 3), повторяются для шага $n-1$ и так далее до $n = 0$.

Алгоритм решения задачи (1)

Из утверждения теоремы 5 следует утверждение.

Теорема 6. Пусть пара $\left(\tau^*, v_0^N\right)$ построена в соответствии с алгоритмом. Тогда $\left(\tau^*, v_0^N\right)$ - решение задачи (1).

Замечание. Основные трудности в использовании алгоритма состоят в i) вычислении условного математического ожидания для урезанной цены оптимальной остановки, ii) в построении областей остановки и продолжения наблюдений. Поэтому для преодоления этих трудностей была применена система компьютерной алгебр Wolfram Mathematica 10, когда наблюдаемая последовательность является дискретной согласованной с фильтрацией случайной последовательностью.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр

Пусть $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ - марковская случайная последовательность, на каждом шаге $n \in \mathbb{N}_0$ принимающая конечное число значений из множества $E \subseteq \mathbb{R}^1$. Пусть $p_n(x, y)$ переходные вероятности за один шаг, то есть $p_n(x, y) \triangleq \mathsf{P}(S_n = y | S_{n-1} = x)$, где $x, y \in E$ – любые.

Пусть функция $f_n : E \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Обозначим $f_n = f_n(x)|_{x=S_n}$. Тогда в силу марковского свойства последовательности $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, определения v_n^N и теоремы Бореля существует функция $v_n^N : E \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ такая, что $v_n^N = v_n^N(x)|_{x=S_n}$.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр
Описание множества остановки

Определение 4. Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ множество $\mathcal{D}_n \triangleq \left\{x \in E : f_n(x) \geq v_n^N(x)\right\}$ назовём множеством остановки в момент времени n.

Замечание. Если для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ известно множество $\mathcal{D}_n^N$, то определён оптимальный момент остановки, который может оказаться не единственным.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр. Описание процедуры построения решения для рассматриваемой задачи (слайд 16)

Поскольку последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ - марковская, то $\mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}v_{n+1}^N\left(S_{n+1}^{n,x}\right) = \sum\limits_{y\in E} v_{n+1}^N(y)p_{n+1}(x,y)$, где $S_{n+1}^{n,x}$ - значение случайной последовательности S_{n+1}, стартовавшей в момент времени n из значения x, $x\in E$.

В силу теорем 2 и 5 имеем представление

$$v_n^N(x) = \begin{cases} f_n, & x\in\mathcal{D}_n^N, \\ \sum\limits_{y\in E} v_{n+1}^N(y)p_{n+1}(x,y), & x\notin\mathcal{D}_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathcal{D}_n = \left\{x\in E : \sum\limits_{y\in E} v_{n+1}^N(y)p_{n+1}(x,y)\le f_n(x)\right\}$.

Результаты применения системы компьютерных алгебр

Пусть имеется одномерная однородная марковская последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

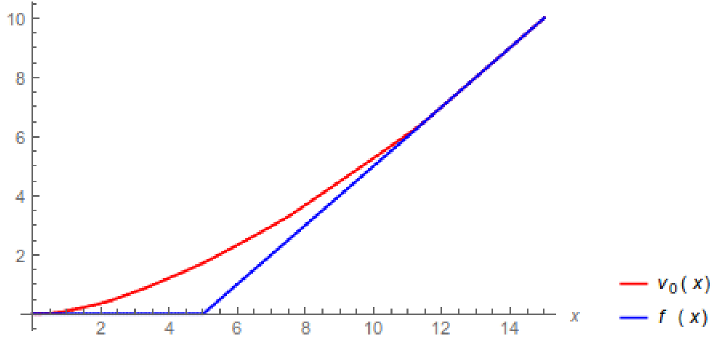
$$S_{n+1} = S_n(1 + \rho_{n+1}),\ S_n|_{n=0} = S_0,$$

где $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ - последовательность случайных величин, принимающих значения в E.

В рассмотренных ниже примерах приведены решения задач об оптимальной остановке для функций $f(x)$ различного вида, где $f(x)$ – измеримая ограниченная функция. Приводимые ниже примеры в литературе не описаны.

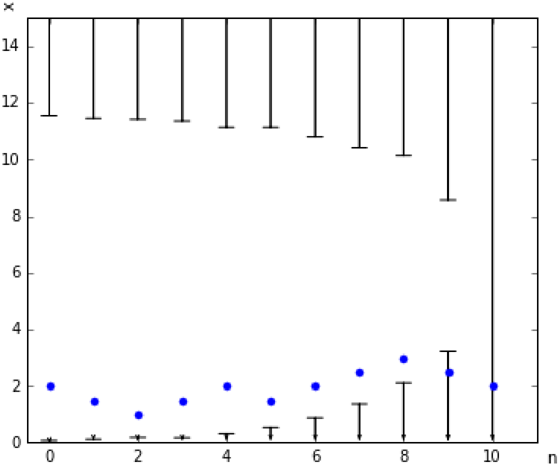
Пример 1: расчет американского опциона call на полном рынке

$$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = \beta^n (x - K)^+$$
$$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10, \quad \beta = 0.9, \quad K = 5$$



$$D_0 = \{0 < x \leq 0.0867076\} \cup \{11.4409 \leq x\}$$
$$\left(D_0 = \{0 < x \leq \tfrac{5120}{59049}\} \cup \{\tfrac{221598311422822240}{19368996785548330} \leq x\}\right)$$

Пример 1: области остановки



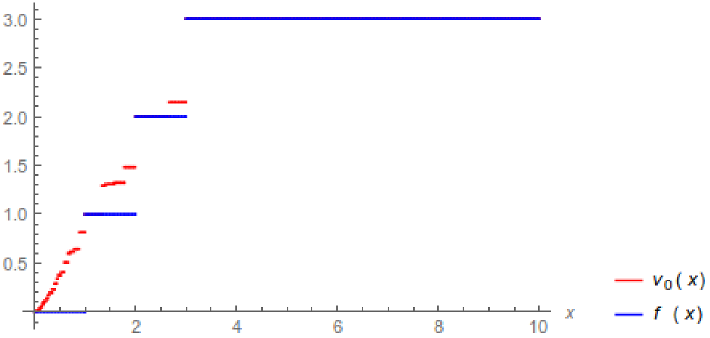
Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются несвязными областями. $\tau^* = 9$.

Пример 1: явный вид $v_0^{10}(x)$

$$
\text{Value-function[0]} = \begin{cases}
-5.+x & x \geq 11.4409 \\
1.47789\times10^{-6}\,(-2560.+19683.\,x) & 0.220104 \leq x \leq 0.260123 \\
3.32526\times10^{-7}\,(-5120.+59049.\,x) & 0.0867076 < x < 0.220104 \\
3.69473\times10^{-8}\,(-517120.+2.38164\times10^{6}\,x) & 0.260123 < x < 0.391593 \\
3.2842\times10^{-8}\,(-670720.+2.90652\times10^{6}\,x) & 0.391593 \leq x < 0.603568 \\
1.82456\times10^{-8}\,(-2.47552\times10^{6}+7.21929\times10^{6}\,x) & 0.660312 \leq x \leq 0.780369 \\
4.50508\times10^{-9}\,(-5.80122\times10^{7}+6.90725\times10^{7}\,x) & 1.98094 \leq x < 2.17805 \\
2.2807\times10^{-9}\,(-4.59315\times10^{7}+9.12351\times10^{7}\,x) & 0.780369 < x < 0.938046 \\
4.56139\times10^{-10}\,(-6.70874\times10^{7}+2.4041\times10^{8}\,x) & 0.603568 \leq x < 0.660312 \\
1.40784\times10^{-10}\,(-1.25629\times10^{9}+1.89293\times10^{9}\,x) & 1.45203 \leq x < 1.8107 \\
1.12627\times10^{-10}\,(-1.95097\times10^{9}+2.57636\times10^{9}\,x) & 1.8107 \leq x < 1.98094 \\
5.06822\times10^{-11}\,(-2.37564\times10^{9}+4.43469\times10^{9}\,x) & 0.938046 \leq x < 1.17478 \\
5.06822\times10^{-11}\,(-2.72152\times10^{9}+4.72911\times10^{9}\,x) & 1.17478 \leq x < 1.45203 \\
5.00565\times10^{-11}\,(-6.94948\times10^{9}+7.01007\times10^{9}\,x) & 2.17805 \leq x \leq 2.34111 \\
3.12853\times10^{-11}\,(-1.49285\times10^{10}+1.28433\times10^{10}\,x) & 2.34111 < x < 2.81414 \\
1.73807\times10^{-12}\,(-4.13804\times10^{11}+2.76695\times10^{11}\,x) & 3.33378 \leq x < 3.52434 \\
1.25141\times10^{-12}\,(-4.23227\times10^{11}+3.38854\times10^{11}\,x) & 2.81414 \leq x < 3.33378 \\
5.40733\times10^{-13}\,(-2.41701\times10^{12}+1.1177\times10^{12}\,x) & 5.02731 \leq x < 5.43211 \\
3.0899\times10^{-13}\,(-4.57888\times10^{12}+2.01779\times10^{12}\,x) & 5.94281 \leq x < 6.53416 \\
3.0899\times10^{-13}\,(-5.13888\times10^{12}+2.1035\times10^{12}\,x) & 6.53416 \leq x \leq 7.02332 \\
6.95229\times10^{-14}\,(-1.08494\times10^{13}+7.06046\times10^{12}\,x) & 3.52434 \leq x < 4.3561 \\
6.95229\times10^{-14}\,(-1.25294\times10^{13}+7.44613\times10^{12}\,x) & 4.3561 \leq x < 5.02731 \\
5.40733\times10^{-14}\,(-2.52799\times10^{13}+1.13813\times10^{13}\,x) & 5.43211 \leq x < 5.94281 \\
4.29153\times10^{-14}\,(-6.67878\times10^{13}+1.89524\times10^{13}\,x) & 10.0014 \leq x < 10.573 \\
1.54495\times10^{-14}\,(-1.10051\times10^{14}+4.31055\times10^{13}\,x) & 7.02332 < x < 7.56445 \\
8.58307\times10^{-16}\,(-3.06381\times10^{15}+9.19056\times10^{14}\,x) & 7.56445 \leq x < 8.44241 \\
8.58307\times10^{-16}\,(-3.1185\times10^{15}+9.25534\times10^{14}\,x) & 8.44241 \leq x < 10.0014 \\
8.58307\times10^{-16}\,(-3.36322\times10^{15}+9.49873\times10^{14}\,x) & 10.573 \leq x < 11.4409 \\
0. & \text{True}
\end{cases}
$$

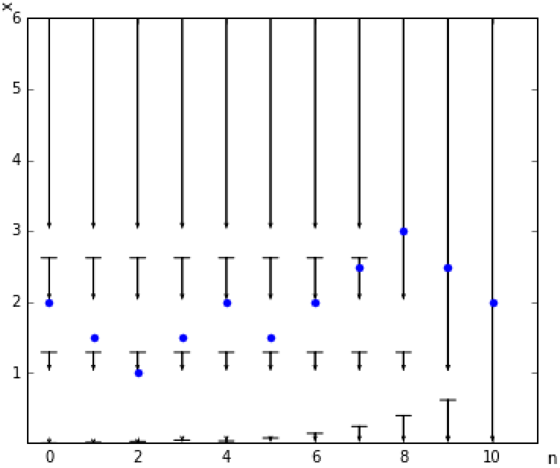
Пример 2: разрывная функция

$$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$$
$$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10$$



$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1 < x \leq 1.33333\} \cup \{2 < x \leq 2.66667\} \cup \{3 < x\}$

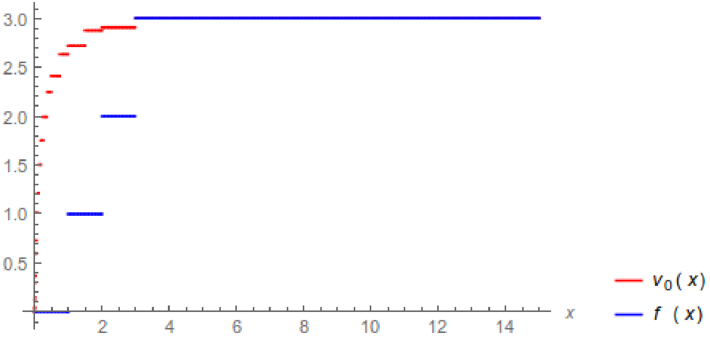
Пример 2: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются полуоткрытыми интервалами. $\tau^* = 7$.

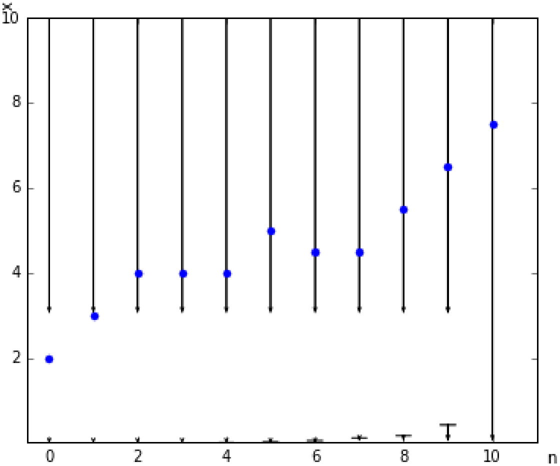
Пример 3: разрывная функция

$$E = \{-0.5; 0; 1\}, \quad p = (\tfrac{1}{6}; \tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{2}), \quad N = 10, \quad f_n(x) = f(x)$$



$$D_0 = \{0 < x \leq 0.000976563\} \cup \{3 < x\}$$

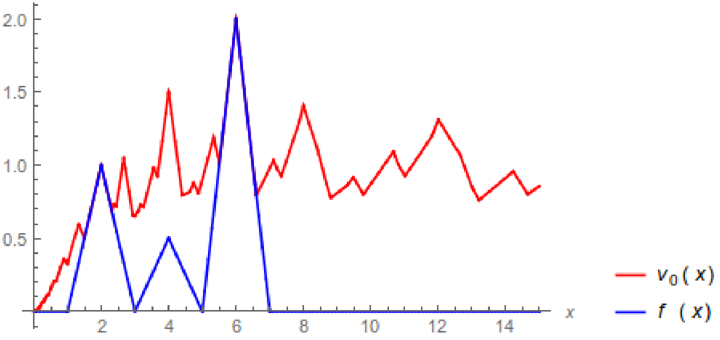
Пример 3: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются полуоткрытыми интервалами. $\tau^* = 2$.

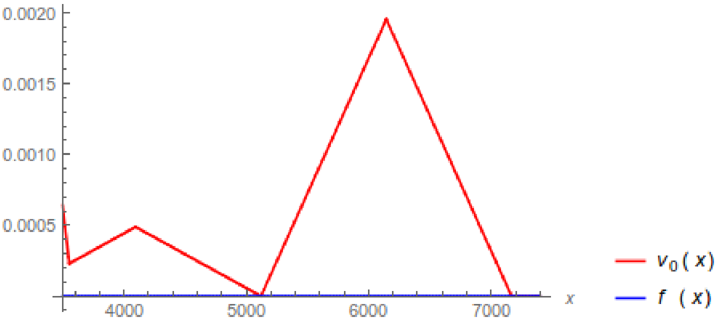
Пример 4: несколько положительных экстремумов

$$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$$
$$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10$$



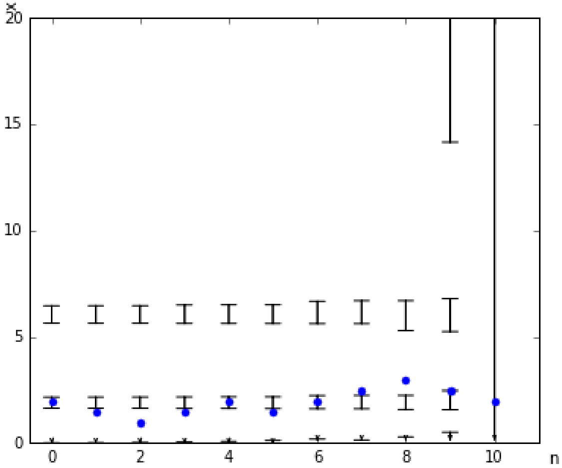
$$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1.5018 \leq x \leq 2.3159\} \cup \{5.50867 \leq x \leq 6.60303\} \cup \{x = 5120\} \cup \{7168 \leq x\}$$

Пример 4: несколько положительных экстремумов



$$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1.5018 \leq x \leq 2.3159\} \cup \{5.50867 \leq x \leq 6.60303\} \cup \{x = 5120\} \cup \{7168 \leq x\}$$

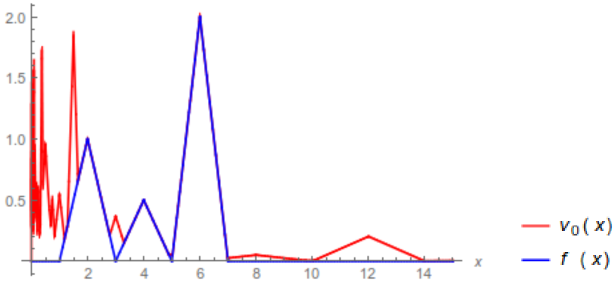
Пример 4: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются несвязными областями. $\tau^* = 0$.

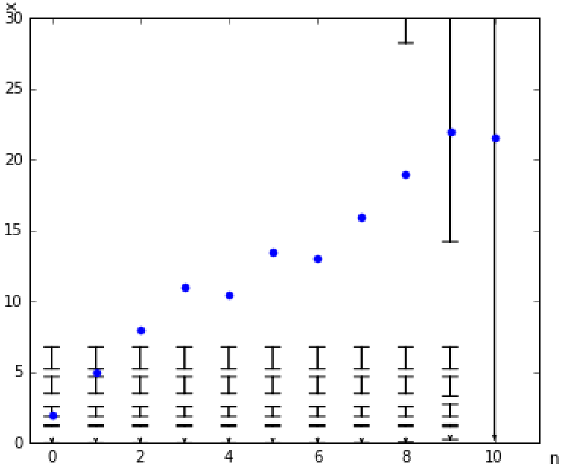
Пример 5: несколько положительных экстремумов (немартингальная мера)

$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$
$a = -0.5,\ b = 3, \quad p = 0.1,\ q = 0.9, \quad N = 10$



$D_0 = \{0 < x \leq 0.000000953674\} \cup \{0.00000286102 \leq x \leq 0.00000286102\} \cup \{1.18195 \leq x \leq 1.28356\} \cup \{1.66106 \leq x \leq 2.78845\} \cup \{3.29731 \leq x \leq 4.88775\} \cup \{5.02461 \leq x \leq 6.98754\} \cup \{x = 5120\} \cup \{7168 \leq x\}$

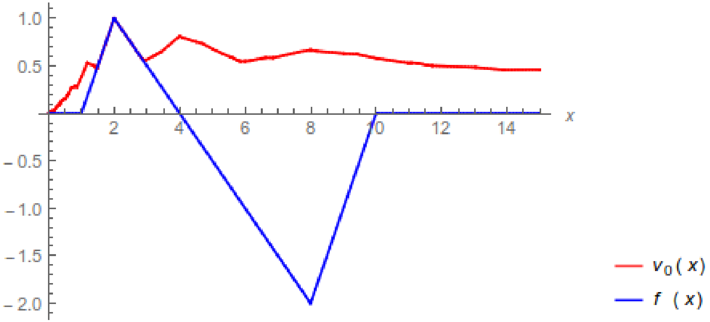
Пример 5: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются несвязными областями. $\tau^* = 0$.

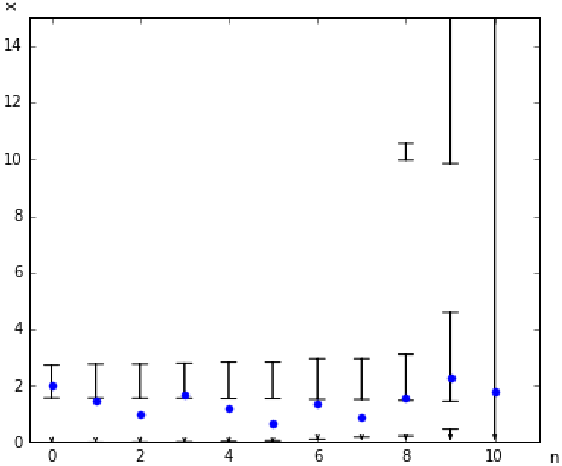
Пример 6: несколько экстремумов разных знаков

$$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$$
$$a = -0.5,\ b = 0.7, \quad p = \frac{7}{12},\ q = \frac{5}{12}, \quad N = 10$$



$$D_0 = \{0. < x \leq 0.00496033\} \cup \{1.47067 \leq x \leq 2.84288\} \cup \{2048. \leq x \leq 2730.67\} \cup \{4096 \leq x\}$$

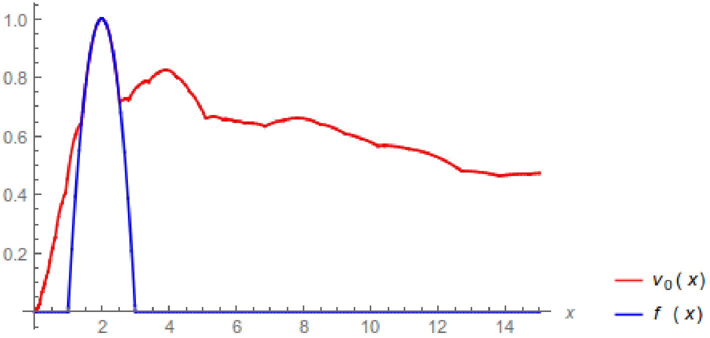
Пример 6: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются несвязными областями. $\tau^* = 0$.

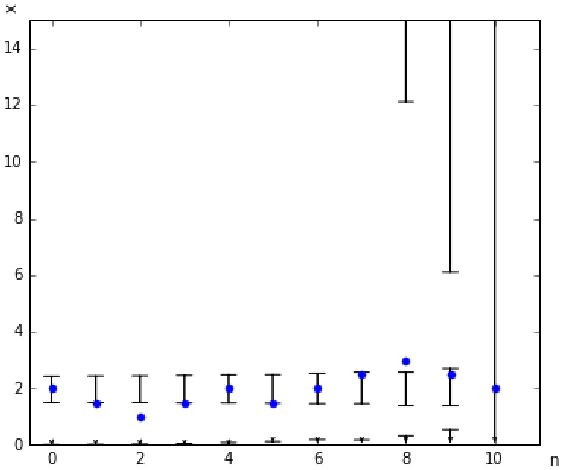
Пример 7: полуокружность

$$E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$$
$$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10$$



$$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1.40176 \leq x \leq 2.53494\} \cup \{3072 \leq x\}$$

Пример 7: области остановки



Области остановки на каждом шаге (линии) и реализация S_n (точки). Области остановки при каждом $n \in N_0$ являются несвязными областями. $\tau^* = 0$.

Опираясь на вышеприведённые алгоритм и примеры, установлено следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $(S_n, \mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$ – однородная марковская последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $S_{n+1} = S_n(1+\rho_{n+1})$, $S_n|_{n=0} = S_0$, где $\{\rho_n\}_{0\le n\le N}$ - последовательность бернуливских случайных величин с положительной вероятностью принимающих значения из двухточечного множества $\{a, b\}$, причем: i) $-1 < a < 0 < b < \infty$; ii) $p^* \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = a) = \frac{a}{|a|+b}$, $q^* \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = b) = 1 - p^*$. Пусть $f(x)$ – непрерывная кусочно-линейная выпуклая функция. Тогда $v_n^N(x)$, являющаяся решением рекуррентного соотношения (2) — непрерывная кусочно-линейная выпуклая функция для любого $n \in N_0$, а множества остановки D_n для $n = \{0, ..., N-1\}$ являются несвязными множествами, состоящих из интервалов вида $\left(0; \frac{c_1^n}{(1+b)^{N-n}}\right]$, $\left[\frac{c_{i-1}^n}{(1+a)^{N-n}}; \frac{c_i^n}{(1+b)^{N-n}}\right]$, $\left[\frac{c_{T_0}^n}{(1+a)^{N-n}}; \infty\right)$, $i = 2, ..., T_n$, $c_{i-1}^n < c_i^n$.

Игровая постановка

Обозначения

Пусть:
i) $M(\Omega)$ множество вероятностных мер на фильтрованном измеримом пространстве $\big(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}\big)$;
ii) $\mathfrak{R}_N \subseteq M(\Omega)$ – множество вероятностных мер Q, эквивалентных базовой мере P, т.е. $\mathrm{P} \sim \mathrm{Q}$;

Постановки задач

Классическая (задача 0):

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau|\mathcal{F}_0) \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N}, \tag{7}$$

Максиминная (задача 1):

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau|\mathcal{F}_0) \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}, \tag{8}$$

Максимаксная (задача 2):

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau|\mathcal{F}_0) \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N}, \tag{9}$$

Решение

Классической:

$$\nu_0^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n), \tag{10}$$

$$\nu_0^N = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_{\tau^*} | \mathcal{F}_0). \tag{11}$$

Максиминной:

$$\underline{\nu}_0^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n). \tag{12}$$

$$\underline{\nu}_0^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_{\underline{\tau}^*} | \mathcal{F}_0). \tag{13}$$

Максимаксной:

$$\bar{\nu}_0^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n), \tag{14}$$

$$\bar{\nu}_0^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_{\bar{\tau}^*} | \mathcal{F}_0). \tag{15}$$

Урезанные цены

Классическая:

$$\nu_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) \tag{16}$$

Нижняя:

$$\underline{\nu}_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n). \tag{17}$$

Верхняя:

$$\bar{\nu}_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n), \tag{18}$$

Очевидно, что

$$\underline{\nu}_n^N \le \nu_n^N \le \bar{\nu}_n^N. \tag{19}$$

Обзор результатов

- REIDEL F. *Optimal Stopping with Multiply Prior.* – Econometrica 77, 857–908 (2009)

  Впервые рассмотрен игровой подход. Установлено, что нижняя цена оптимальной остановки удовлетворяет рекуррентному соотношению беллмановского типа, а также оптимальные правила остановки и двойственность для решения.

- MARCEL NUTZ, JIANFENG ZHANG *Optimal stopping under adverse nonlinear expectation and related games.* – https://arxiv.org/pdf/1212.2140.pdf (2015)

  Установлен принцип двойственности для нижней цены оптимальной остановки, найден оптимальный момент остановки, установлено существование седловой точки.

Обзор результатов

ERHAN BAYRAKTARA, SONG YAO *Optimal stopping with random maturity under nonlinear expectations.* – https://arxiv.org/pdf/1505.07533.pdf (2016)

Множество $\mathfrak{R}_N$ рассматривается как слабо-комактное. Оптимальный момент остановки апроксимируется возрастающей последовательностью Липшиц-непрерывных моментов остановки.

DENIS BELOMESTNY, VOLKER KRATSCHMER *Optimal stopping under model uncertainty: Randomized stopping times approach.* – https://arxiv.org/pdf/1405.2240.pdf

Приведены несколько численных примеров решения (использую метод Монте-Карло).

Ограниченность $\bar{\nu}^N$ $(\underline{\nu}^N)$

Теорема 1. Пусть существует положительная константа C такая, что $\sup\limits_{n \in \{0,\ldots,N\}} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^m} |f_n(x)| \leq C$. Тогда справедливы следующие утверждения:

i) для любых $n \in \{0, \ldots, N\}$ $|\bar{\nu}_n^N| \leq C$ $(|\underline{\nu}_n^N| \leq C)$ P – п.н.;

ii) $(\bar{\nu}_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n \in \{0,\ldots,N\}}$ является ограниченным супермартингалом относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$;

iii) для любого $\varepsilon > 0$ существует мера $\mathsf{Q}^{\varepsilon} \in \mathfrak{R}_N$ такая, что $\{\underline{\nu}_n^N - \varepsilon n\}_{n \in \{0,\ldots,N\}}$ является ограниченным супермартингалом.

Рекуррентное соотношение для $\bar{\nu}^N$ ($\underline{\nu}^N$)

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливо следующее утверждение.
Согласованная последовательность $(\bar{\nu}_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n\ \in\ \{0,\dots,N\}}$ $((\underline{\nu}_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n\ \in\ \{0,\dots,N\}})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P – п.н.

$$\begin{cases} \bar{\nu}_n^N = \max\{f_n,\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\bar{\nu}_{n+1}^N|\mathcal{F}_n)\}, \\ \bar{\nu}_n^N|_{n=N} = f_N(S_n) \end{cases} \tag{20}$$

$$\left(\begin{cases} \underline{\nu}_n^N = \max\{f_n,\ \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\underline{\nu}_{n+1}^N|\mathcal{F}_n)\}, \\ \underline{\nu}_n^N|_{n=N} = f_N(S_n) \end{cases}\right). \tag{21}$$

Замечания к теореме 2

i) Из утверждений теорем 1 и 2 следует, что относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ последовательность $(\bar{\nu}_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}$ – это наибольший супермартингал, являющийся верхней огибающей согласованной последовательности $(f_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}$.

ii) Последовательность $(\underline{\nu}_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathsf{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{R}_N$, относительно которой последовательность $\{\underline{\nu}_n^N - \varepsilon n\}_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}$ является супермартингалом.

iii) Из утверждения теоремы 2 также следует, что относительно любой $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ случайная последовательность $(\nu_n^N,\ \mathcal{F}_n)_{n\,\in\,\{0,\ldots,N\}}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P – п.н.

$$\begin{cases} \nu_n^N = \max\{f_n,\ \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\nu_{n+1}^N|\mathcal{F}_n)\}, \\ \nu_n^N|_{n=N} = f_N(S_n). \end{cases} \tag{22}$$

Следствие из теоремы 2

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых $n \in \{0, ..., N\}$, $\tau \in \mathcal{T}_n^N$, $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ справедливы неравенства $\mathsf{P}-$ п.н.

$$1) \quad \begin{cases} \bar{\nu}_n^N \geq f_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} + \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\bar{\nu}_{n+1}^N | \mathcal{F}_n), \\ \bar{\nu}_n^N|_{n=N} = f_N(S_n). \end{cases} \tag{23}$$

причем

$$\bar{\nu}_n^N \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\sum_{i=n}^{N} f_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_n); \tag{24}$$

$$2) \quad \begin{cases} \underline{\nu}_n^N \geq f_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} + \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\underline{\nu}_{n+1}^N | \mathcal{F}_n), \\ \underline{\nu}_n^N|_{n=N} = f_N(S_n). \end{cases} \tag{25}$$

причем

$$\underline{\nu}_n^N \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(\sum^{N} f_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_n). \tag{26}$$

Оптимальные моменты остановки

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Момент остановки $\bar{\tau}^* \in \mathcal{T}_0^N$ ($\underline{\tau}^* \in \mathcal{T}_0^N$) является оптимальным в задаче 1 (2) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\bar{\tau}^* = \min\left\{0 \le n \le N : \bar{\nu}_n^N = f_n\right\} \tag{27}$$

$$(\underline{\tau}^* = \min\left\{0 \le n \le N : \underline{\nu}_n^N = f_n\right\}). \tag{28}$$

Замечание. Из (27) ((28)) следует, что момент остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_0^N$ в зачае 0 имеет вид

$$\tau^* = \min\left\{0 \le n \le N : \nu_n^N = f_n\right\}, \tag{29}$$

поскольку $\mathfrak{R}_N$ является одноточечным множестом и поэтому для любого $n \in \{0, ..., N\}$ справедливы равенства $\nu_n^N = \bar{\nu}_n^N = \underline{\nu}_n^N$ P − п.н..

Оценка момента остановки для классической постановки

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда P – п.н. справедливы неравенства

$$\bar{\tau}^* \leq \tau^* \leq \underline{\tau}^*. \tag{30}$$

Замечание. Неравенства (30) получены впервые и устанавливают соответственно верхнюю и нижнюю границу для значений оптимального момента остановки задачи 0.

Двойственность

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого $n \in \{0, ..., N\}$ справедливо равенство P – п.н.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) \tag{31}$$

$$(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n)). \tag{32}$$

Замечание. Формула (31) почти очевидна, а формула (32) позволяет утверждать существование ε-седловой точки [?], то есть для любых $n \in \{0, ..., N\}$, $\tau \in \mathcal{T}_n^N$, $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ и $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства P – п.н.

$$-\varepsilon + \operatorname*{ess\,inf}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n) \le \underline{\nu}_n^N \le \varepsilon + \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}(f_\tau | \mathcal{F}_n). \tag{33}$$

Спасибо за внимание