



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Совершенствование процесса обслуживания в медицинских учреждениях на основе математических моделей потоков пациентов

Аспирант 1 года обучения: Прокофьева Елизавета Сергеевна
Научный руководитель: Мальцева Светлана Валентиновна



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

СТРУКТУРА ДОКЛАДА

1. План диссертационного исследования
2. Обзор литературы
3. Системы массового обслуживания
4. Эрланговская система с ожиданием
5. Описание модели потока пациентов
6. Текущие результаты

ПЛАН ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

- **Цель исследования** состоит в том, чтобы с помощью разработанной математической модели прогнозирования потоков пациентов повысить эффективность и качество обслуживания пациентов в городских медицинских учреждениях.

Задачи исследования:

- Провести системно - аналитическое исследование для описания основных параметров системы следующих сущностей: страховой компании, медицинского учреждения, электронной медицинской карты, пациента и других;
- Разработать модель для прогнозирования потоков пациентов к тому или иному специалисту с учетом нагрузки на необходимое оборудование;
- Разработать рекомендательный сервис для пациентов с учетом нагрузки на ЛПУ;
- Провести экспериментальные исследования эффективности предложенных моделей, внедрить результаты исследования в практику.



ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

- системы сложны для первичного диагностирования (Финн В.К., Ребров О.Ю., Мешалкин Л.Д., Кобринский Б.А.)
- модель параллельно-последовательной системы массового обслуживания предлагается для кластеризации первичного потока пациентов (Храмкова М.А.)
- алгоритм маршрутизации прохождения диагностических процедур пациентом (Ануфриева Н.Ю.)
- моделирование продолжительности обслуживания пациентов (Harper P., Cote M., Carter E., Potts H.)
- метод Монте-Карло для предсказания числа пациентов в очереди (Muthoni G.J., Kimani S., Wafula J.)
- решение управленческих задач посредством применения СМО (Lakshmi C, Sivakumar Appa Iyer)
- анализ производительности систем, коэффициентов утилизации, времени ожидания в очереди, анализ систем записи к медицинским специалистам (Fomundam & Herrmann, 2007)
- время ожидания и вероятность отказа пациентов от медицинских услуг (McClain, 1976)



СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы, в которых в случайные моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок, называются **системами массового обслуживания (СМО)**.

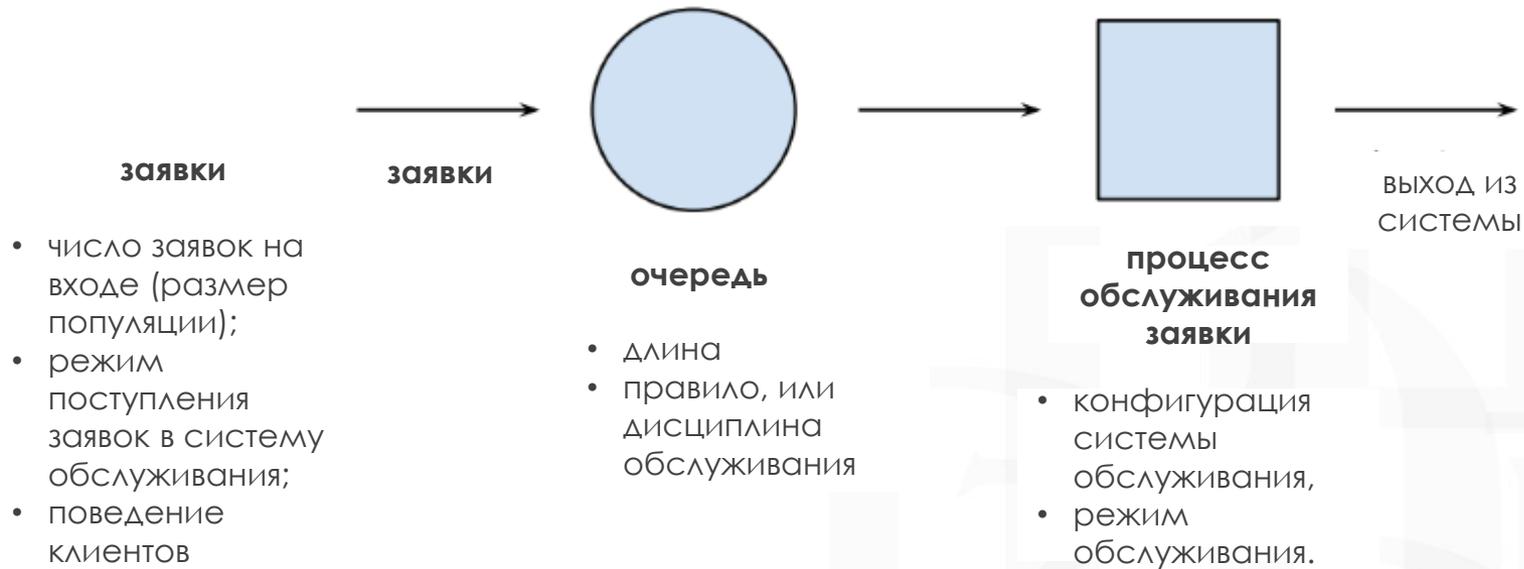


Рис.1. Принцип устройства СМО

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

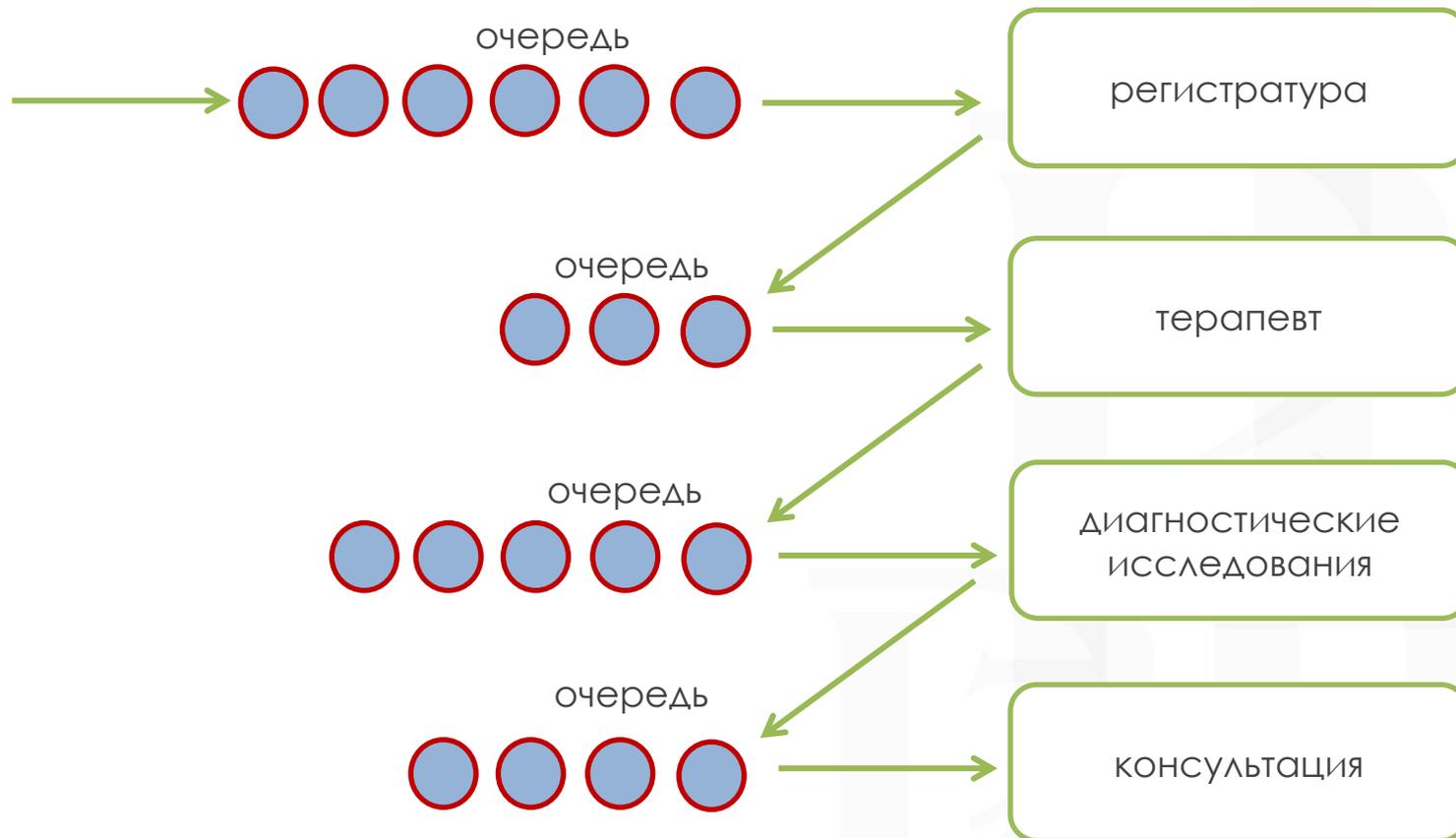


Рис.2. Пример СМО в поликлинике

ЭРЛАНГОВСКАЯ СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ

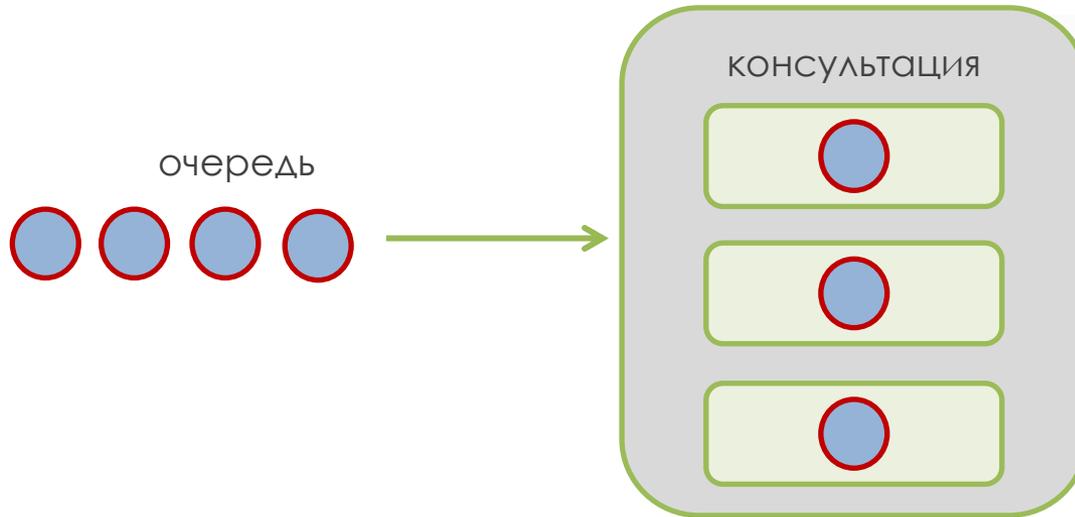


Рис.3. Пример СМО в поликлинике

Нотация Кендалла (Kendall)
A/B/c/K/m/Z

A- распределение потока заявок

B- распределение времени обслуживания

c- количество серверов

K- ёмкость системы обслуживания

m-популяция источника клиентов

Z-принцип обслуживания

Модель **M/M/n**

$$p(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пуассоновский поток вызовов

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

экспоненциально распределенное время обслуживания

$n = 3$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

- отделение скорой и неотложной медицинской помощи
- данные на период с 01.01.2012 по 31.12.2012
- 51.458 зарегистрированных пациентов
- время работы отделения (24 часа в сутки)
- в базе данных содержится информация о пациенте: имя, адрес, время прибытия, диагноз и время, проведённое в отделении скорой помощи



Рис.4. Процесс обслуживания пациента в отделении скорой помощи

Уровень распределения/код	Время ожидания пациента до приёма первого медицинского консультанта
Уровень I (Красный код)	0 минут
Уровень II (Жёлтый код)	Max 10 минут
Уровень III (Зелёный код)	Max 30 минут
Уровень IV (Голубой код)	Max 60 минут
Уровень V (Белый код)	Max 120 минут

- СМО** для оценки необходимого количества ресурсов
- оценка среднего времени ожидания пациента в системе

Таблица 1. Коды распределения в зависимости от тяжести состояния пациента

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

x_i -ежегодное среднее количество прибытий пациентов за интервал времени $[t_{i-1}, t_i]$, где t_0 - начало дня (0 часов);

$P_k^{d,i}$ -количество пациентов, прибывших в день d за интервал времени $[t_{i-1}, t_i]$;
 Таким образом, среднее количество пациентов в сутки (1);

$$x_i^d = \frac{\sum_{M=1}^{12} \sum_{d=1}^{\{29,30,31\}} P_k^{d,i}}{12} \quad (1)$$

M -месяц, сумма после d соответствует количеству дней в каждом месяце. Для нахождения среднего количества пациентов, прибывших за интервал времени $[t_{i-1}, t_i]$ воспользуемся отношением:

$$x_i = \frac{x_i^d}{24} \quad (2)$$

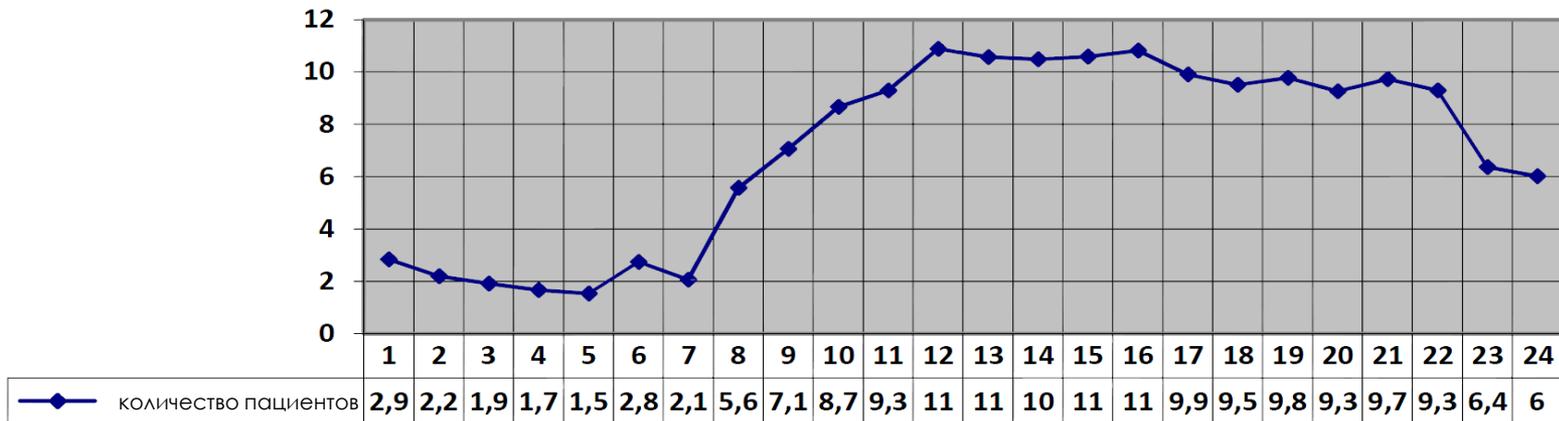


Таблица 2. Среднее количество прибытий пациентов в 2012 году



ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

λ - среднее число заявок в единицу времени (темп поступления заявок);

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{24} \quad (3)$$

$\lambda = 7$ (пациенты прибывают в отделение скорой помощи со скоростью 7 человек в час), $\mu = 3$, то есть в час обслуживается три пациента, в среднем по 20 минут на каждого;

Состояние системы определяется как общее количество пользователей в системе (или в обслуживании, или ожидающих в очереди). Система находится в статистическом равновесии, если выполняется условие:

$$\frac{\lambda}{n\mu} < 1 \quad (4)$$

где n обозначает количество ресурсов, в данном случае - минимальное количество врачей в отделении скорой помощи.

λ	7	8	9	10	11	12
n	3	3	4	4	4	5

Таблица 3. Минимальное количество врачей в отделении скорой помощи



ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

$\lambda=7$; $\mu=3$; $n=3$; $\alpha=7/3$;

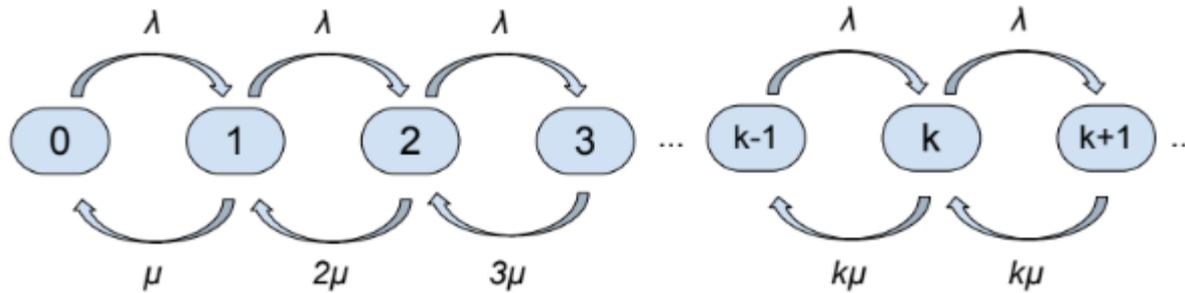


Рис.5. Диаграмма переходов состояний M/M/n

- λ - число заявок в единицу времени (темп прибытия)
- μ - число пациентов, обслуживаемых в единицу времени
- n - количество врачей
- ρ - параметр утилизации (загруженности системы)
- $1 / \mu$ - время обслуживания
- P_0 - вероятность того, что система свободна
- P_k - вероятность того, что в системе k заявок

Для оптимизации процесса ищем вероятность P_k , или вероятность того, что поступивший пациент должен ожидать в очереди приёма, когда все врачи заняты

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \quad k < n \quad (5)$$

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n!n^{k-n}} \quad k \geq n \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad (7)$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

$$\lambda=7; \mu=3; n=3; \alpha=7/3;$$

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \quad k < n \quad (5)$$

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n!n^{k-n}} \quad k \geq n \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad (7)$$

$$P_0 + P_1 + (P_2 + P_3 + \dots) = 1 \quad (8)$$

$$P_0 + P_0 \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!} + P_0 \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{3!3^0} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \frac{1}{3!3^1} \dots\right) = 1 \quad (9)$$

$$P_0 + P_0 \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!} + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{3!} \left[\frac{1}{3^0} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{3^2} \dots\right]\right) = 1 \quad (10)$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3\mu}{3\mu - \lambda}} \quad (11)$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПОТОКА ПАЦИЕНТОВ

$$\lambda=7; \mu=3; n=3; \alpha=7/3;$$

$P_0 = 0.064$ -вероятность того, что система свободна (нет пациентов в отделении скорой помощи)

Применив С- формулу Эрланга (12), получаем вероятность ожидания пациента, когда все три сервера (врача) заняты

$$C\left(3, \frac{\lambda}{\mu}\right) = P_0 \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3\mu}{3\mu-\lambda} = 0.611 \quad (12)$$

Длина очереди в случае нашей модели М/М/3 определяется следующим образом (13):

$$L_q = P_0 \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^k \quad (13)$$

$$L_q = P_0 \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3\lambda\mu}{(3\mu-\lambda)^2} \quad (14)$$

$$L_q = \frac{\frac{\lambda}{3\mu}}{1-\frac{\lambda}{3\mu}} C\left(3, \frac{\lambda}{\mu}\right) = 2.13 \quad (15)$$

Таким образом, в случае нахождения системы в состоянии статистического равновесия средняя длина очереди составляет 2.13, поэтому для вновь прибывшего пациента довольно высока вероятность оказаться в этой очереди.

Теперь рассмотрим время ожидания пациента в очереди, воспользовавшись **Теоремой Литтла**: средняя длина очереди в произвольный момент времени равна интенсивности прибытия, умноженной на время ожидания:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (16)$$

$W_q=0.30$ (18 минут) – среднее время ожидания в очереди

$W_t=1/\mu= .033$ (19.8 минут) – среднее время у врача

$W = W_t + W_q = 0.63$ (37.8 минут)- общее время в отделении

$L = W\lambda=4.41$ – среднее общее количество пациентов в отделении

$$W_q = \frac{1}{3\mu-\lambda} C\left(3, \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.30 \quad (17)$$



ТЕКУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Модель «Выписки из больницы» (Hospital discharges by diagnosis)

$$Y_1 = 21,24 * rs_bds + 543 * rs_equip + 10,9 * rs_phys$$

Модель «Больничные дни пациентов» (Hospital days of in-patients)

$$Y_2 = 1920124 + 167,87 * rs_bds + 30299,97 * rs_equip - 72 * rs_phys$$

Модель «Средняя продолжительность пребывания в больнице» (In-patient average length of stay)

$$Y_3 = 8,15 + 0002 * rs_equip - 0,000012 * rs_phys,$$

где Y_1 – выписки из больницы (Hospital discharges by diagnoses), когда больной пациент официально покидает медицинское учреждение после пройденного лечения

Y_2 – больничные дни пациентов (Hospital days of in-patients)

Y_3 – средняя продолжительность пребывания в больнице (In-patient average length of stay, ALOS)

rs_bds (Hospital beds by type of care) все доступные койки в медицинском учреждении;

rs_equip (Medical Technology) медицинское оборудование, включающее магнитно-резонансные томографы, гамма - камеры, ангиографические комплексы и литотриперы;

rs_phys (Physicians by sex and age) врачи рассматриваемых медицинских учреждений;

$silc_08$ (Unmet needs for medical examination) неудовлетворенные потребности после медицинского осмотра по полу, возрасту, доходу пациентов.



ТЕКУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве источника основных показателей здравоохранения была выбрана открытая база статистической службы Евростат, занимающейся сбором информации по странам-членам Европейского Союза. Для исследования представлена информация по 28 странам Европейского Союза на период с 2007 по 2016 год включительно.

Показатель	k	Алгоритм	Тип связи	N класт.	Силуэт
co_disch1_y	5	иерарх.	полная	2	0,86
co_hosday_y	5	иерарх.	полная	3	0,78
co_inpst_y	2	иерарх.	полная	3	0,64
rs_bds	5	k-medoids	---	4	0,54
rs_equip	5	иерарх.	полная	2	0,85
rs_phys	5	иерарх.	полная	4	0,76
silc_08	5	иерарх.	полная	4	0,63

Таблица 4. Параметры для кластерного анализа



ТЕКУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Полученная таблица меток позволяет видеть, что динамика показателей стран довольно неоднородна. При этом самым частым типом поведения рядов являлись монотонный рост или монотонное падение на исследуемом периоде. Для некоторых стран было выявлено также и аномальное поведение, выделенное в отдельные (иногда единичные) кластеры.

Страна/параметр	co_disch1_y	co_hosday_y	co_inpst_y	rs_bds	rs_equip	rs_phys	silc_08
Чешская Республика	1	1	1	1	1	1	1
Дания	1	1	1	1	1	1	2
Германия	2	2	1	1	1	1	3
Франция	1	1	1	1	1	1	1
Хорватия	1	1	1	3	2	1	3
Италия	1	1	2	1	1	2	4
Литва	1	1	1	1	1	3	3
Люксембург	1	1	3	4	2	1	4
Венгрия	1	1	2	1	1	4	4
Мальта	2	3	2	1	2	3	2
Польша	2	2	1	5	1	1	3
Румыния	1	1	1	1	1	1	3
Словения	2	3	1	5	1	1	2
Словакия	2	2	1	1	1	3	3
Великобритания	2	1	1	1	1	1	4
Швейцария	2	1	1	1	1	1	1

Таблица 5. Итоговая таблица меток

ТЕКУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для кластеризации полученной матрицы расстояний иерархическим методом был выбран полный тип связи между промежуточными кластерами, поскольку он позволяет выявлять компактные кластеры, наиболее похожие друг на друга. Анализ коэффициента силуэта при различных параметрах показывает (рисунок 6), что оптимальной является модель с семью кластерами.

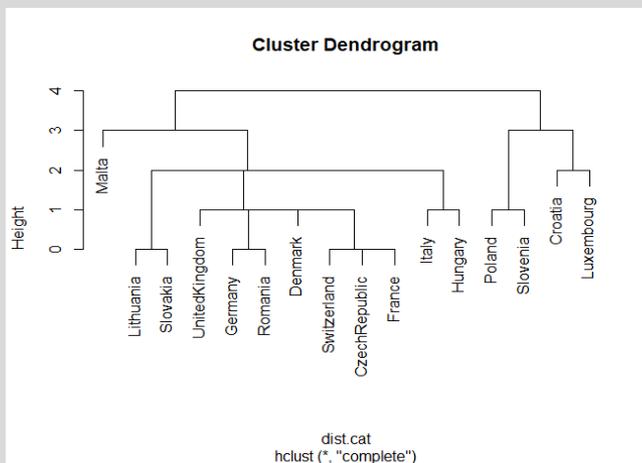


Рис. 7. Дерево кластеризации

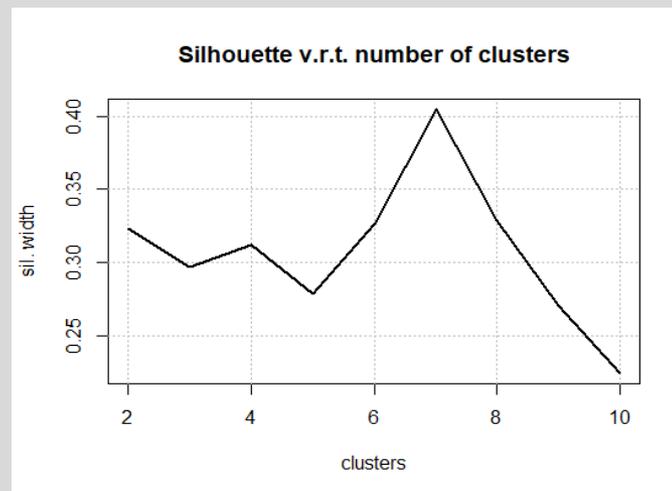


Рис. 6. Кривая силуэта

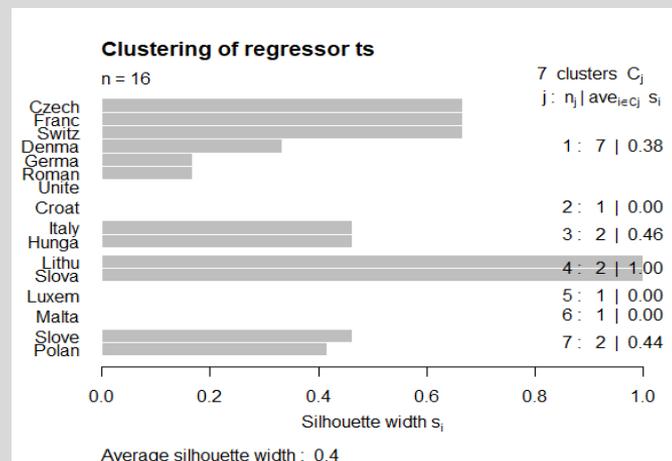


Рис. 8. Силуэт кластеризации



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо за внимание!

101000, Россия, Москва, Мясницкая ул., д. 20

Тел.: (495) 621-7983, факс: (495) 628-7931

www.hse.ru