



Рабочая программа дисциплины
«Дифференциальная геометрия, гладкие структуры и калибровочная теория»

для подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре
по направлению 01.06.01 «Математика и механика»

профили: 01.01.03 Математическая физика;

01.01.04 Геометрия и топология;

01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика;

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Разработчики программы

Тихомиров А.С., д.ф.-м.н, профессор факультета математики

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«09» октября 2015 г., протокол № 11

Москва - 2015

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.

1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ И НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению «01.06.01 Математика и механика», профили 01.01.03 Математическая физика; 01.01.04 Геометрия и топология; 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика; 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов.

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ подготовки научно-педагогических кадров по направлению «Математика и механика»;
- Образовательной программой «Математика и механика» подготовки аспиранта;
- Учебными планами подготовки аспирантов по направлению «01.06.01 Математика и механика», вышеуказанных профилей, утвержденными в 2015 г.

2. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия, гладкие структуры и калибровочная теория» являются:

- Формирование у слушателей представления о базисных понятиях, основных методах и применениях дифференциальной геометрии в теории гладких многообразий;
- Знакомство с калибровочной теорией как аппаратом дифференциальной геометрии при изучении гладких структур на топологических многообразиях;
- Углублённое изучение и владение методами калибровочной теории, в частности, вычисление кривизны связностей на главных и векторных расслоениях;
- Рассмотрение конкретных примеров пространств модулей автодуальных связностей — инстантонов - на четырехмерных многообразиях, знакомство с современными результатами Дональдсона, Уленбек, Таубса по приложению инстантонов к описанию гладких структур на многообразиях.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Получить общее представление об активно развивающемся разделе современной математики «дифференциальная геометрия и калибровочная теория», изучить базисные понятия и основные методы;
- Изучить основные методы, принципы и математические структуры, используемые в дифференциальной геометрии и калибровочной теории, в частности, со связностями на главных и векторных расслоениях, ковариантным дифференцированием и кривизной связности;
- Ознакомиться с применениями дифференциальной геометрии и калибровочной теории в других разделах математики, в частности, в дифференциальной топологии четырехмерных многообразий;

- Быть готовым использовать основные принципы и методы дифференциальной геометрии и калибровочной теории в последующей профессиональной деятельности в качестве научных сотрудников, преподавателей вузов.

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра и магистра направления подготовки «Математика»

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах: базовые курсы геометрии и алгебры (1 год бакалавриата)

Желательно, но не необходимо также знакомство с некоторыми основными понятиями и результатами из курсов: введение в дифференциальную топологию

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями:

- гладкое многообразие, касательное пространство, метрика на многообразии

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Дифференциальная геометрия;

Алгебраическая геометрия;

Дополнительные главы математической физики.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает компетенции:

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	УК-1	Демонстрирует способность стратегически и креативно мыслить, творчески подходить к оценке и решению проблем.	Практические занятия, посвящённые критическому чтению специальных текстов. Самостоятельная работа с академическими текстами
Способность генерировать оригинальные теоретические конструкции, гипотезы и исследовательские вопросы	УК-2	Демонстрирует способность выбирать наиболее релевантные изучаемому предмету методы и стратегии исследований	Диспуты, дискуссии, подготовка докладов и выступлений
Способность осуществлять	УК-5	Анализирует, оценивает	Диспуты, групповые

комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения		потенциал новых учебно-методических ресурсов, целесообразность их использования в процессе исследования	дискуссии, участие в исследовательских и творческих проектах; самостоятельная работа
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, динамических систем, теории вероятностей и математической статистики, математической физики	ПК-1	Демонстрирует способность стратегически и креативно мыслить, творчески подходить к оценке и решению проблем Анализирует мировые тенденции в математических кругах, демонстрирует их понимание и творчески использует в собственных исследованиях	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	ОПК-1	Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность к разработке новых методов исследования, их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав	ОПК-2	Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к дисциплинам по выбору, предлагаемым к изучению аспирантам на первом, втором и третьем году обучения.

5. Содержание УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Гладкие структуры на многообразиях

Гладкие структуры на топологических многообразиях. Топологические четырехмерные многообразия. Гладкие четырехмерные многообразия. Экзотические гладкие структуры на пространстве \mathbf{R}^4 .

Тема 2 Связности на расслоениях

Главные и векторные расслоения на многообразиях. Касательное расслоение. Тензоры. Связности на расслоениях. Ковариантное дифференцирование.

Тема 3 Кривизна и характеристические классы

Тензор кривизны связности на расслоении.

Связь между кривизной и ковариантным дифференцированием. Характеристические классы расслоений со связностями, их вычисление через кривизну по формулам Черна-Вейля

Тема 4 Многообразия связностей

Многообразия связностей. Пространства Соболева. Приводимые связности. Калибровочная группа. Теорема о срезе. Пространство модулей связностей.

6. ОЦЕНИВАНИЕ

Основная форма текущего контроля – решение задач из домашних заданий (7-10 задач по каждой теме). Задачи подбираются так, чтобы их решение потребовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующем разделе курса. Часть задач повышенной сложности отмечается звездочками. Решение таких задач не является необходимым условием для получения отличной оценки, но существенно способствует получению таковой. Оценивается решение задач в процентной доле общего числа решённых в течение семестра задач (включая сюда и задачи со звездочкой) от общего количества выданных в течение семестра задач без звездочек. Таким образом, результат текущего контроля может быть выше 100%

Экзамен и зачёт представляют собою письменные работы продолжительностью 4 часа каждая. В каждой работе студентам предлагается 8 задач. Для получения 100% результата достаточно правильно решить 6 задач. При решении большего числа задач оценка увеличивается. За полное решение каждой задачи студент получает 10 баллов, окончательный результат экзамена оценивается в процентной доле набранного количества баллов по отношению к 60.

Промежуточная оценка за первый модуль вычисляется по формуле

$$\text{Max}(150, E+H)/15$$

где E - общее количество набранных в зачётной работе баллов в процентах от 60, а H – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в первом модуле задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 задач из зачётной работы.

Итоговая оценка за второй модуль вычисляется по аналогичной формуле

$$\text{Max}(150, E+H)/15$$

где E - общее количество набранных в экзаменационной работе баллов в процентах от 60, а H – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в течение двух модулей задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 экзаменационных задач.

В диплом ставится результирующая итоговая оценка по учебной дисциплине.

7. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Тематика заданий текущего контроля

Пример домашнего задания:

1. Пусть q - унимодулярная положительно определенная целочисленная билинейная форма на решетке $L = \mathbf{Z}^g$. Покажите, что число векторов v в L с условием $q(v,v)=1$ не превосходит g . Покажите, что если число таких векторов равно $2g$, то форма q диагонализуема над \mathbf{Z} .
2. Докажите, что если $P \times G \rightarrow P$ – гладкое свободное действие компактной группы Ли G на гладком многообразии P . Докажите, что это действие определяет гладкое главное расслоение $P \rightarrow P/G$.
3. Покажите, что естественное действие группы $GL(n, \mathbf{R})$ на множестве реперов E касательного расслоения гладкого многообразия X задает на E структуру гладкого главного $GL(n, \mathbf{R})$ -расслоения.
4. Пусть $f: P \rightarrow B$ – главное G -расслоение. Докажите, что $f^*P \rightarrow P$ есть тривиальное главное G -расслоение.

5. Пусть A — связность на векторном расслоении $W \rightarrow X$, рассматриваемая как ковариантное дифференцирование. Это дифференцирование продолжается до линейного оператора для любых

Покажите, что оператор (называемый оператором кривизны связности A) есть умножение на 2-форму со значениями в расслоении $EndW$.

8. РЕСУРСЫ

1) Основная литература

С. М. Натанзон. Введение в пучки, расслоения и классы Черна. М.: МЦНМО, 2010, свободно доступна с сайта:

<https://www.mccme.ru/free-books/>

2) Дополнительная литература

М. Э. Казарян. Курс дифференциальной геометрии (2001–2002). М.: МЦНМО, 2002, свободно доступна с сайта:

<https://www.mccme.ru/free-books/>

3) Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	Из внутренней сети университета (договор)
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	Из внутренней сети университета (договор)
3.	LaTeX пакет верстки научных текстов	Свободно распространяемый программный продукт

4) Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	База препринтов Cornell University	https://arxiv.org/
2.	База данных зарубежной периодики MathSciNet	Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ https://library.hse.ru/e-resources
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		

1.	Открытое образование	https://openedu.ru
2.	Coursera	http://www.coursera.org
3.	edX	https://www.edx.org/course
4.	MITOPENCOURSE WARE	https://ocw.mit.edu/index.htm

5) Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

Формат изучения дисциплины: с использованием онлайн курса