



**Рабочая программа дисциплины**  
**«Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели»**

для подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре  
по направлению 01.06.01 «Математика и механика»

профили: 01.01.03 Математическая физика;

01.01.04 Геометрия и топология;

01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика;

01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Разработчики программы

Апенко С.М., д.ф.-м.н.

Зыбин К.П. д.ф.-м.н.

Поволоцкий А.М., к.ф.-м.н.

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«09» октября 2015 г., протокол № 11

Москва - 2015

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*



## 1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ И НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению «01.06.01 Математика и механика», профили 01.01.03 Математическая физика; 01.01.04 Геометрия и топология; 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика; 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов.

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ подготовки научно-педагогических кадров по направлению «Математика и механика»;
- Образовательной программой «Математика и механика» подготовки аспиранта;
- Учебными планами подготовки аспирантов по направлению «01.06.01 Математика и механика», вышеуказанных профилей, утвержденными в 2015 г.

## 2. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели» являются:

Получение сведений о современном состоянии исследований случайных процессов методами, развитыми в теории случайных матричных ансамблей и интегрируемых систем ;

Изучение математических структур, лежащих в основе точно решаемых моделей теории вероятности и случайных процессов .

Выработка навыков научного общения, представления глубоких математических и физических результатов перед широкой физико-математической аудиторией

В результате освоения дисциплины студент должен научиться использовать при решении конкретных задач

- Свободно владеть современным математическим аппаратом теории случайных матричных ансамблей и теории интегрируемых систем, в том числе методами ортогональных полиномов, теорией детерминантных процессов, теорией симметрических функций, ансамблем Бете.
- Владеть навыками вероятностного описания многокомпонентных систем взаимодействующих частиц, непересекающихся путей, диаграмм Юнга и других связанных с ними объектов.
- Владеть основами асимптотического анализа возникающих вероятностных распределений, такими как метод перевала, стационарной фазы, метод детерминанта Фредгольма.

Иметь навыки научных дискуссий о применимости стохастических моделей, обоснованности модельных гипотез, оценке степени математической строгости и формализуемости тех или иных неформальных рассуждений физического характера.



Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- базовые курсы анализа, дискретной математики теории вероятности, теории функции комплексного переменного (1-2 годы бакалавриата);

Желательно, но не необходимо также знакомство с некоторыми основными понятиями и результатами из курсов:

- теории случайных процессов (III-IV модули, 3, 4 год бакалавриата);
- функциональный анализ (I-IV модули, 3, 4 год бакалавриата);

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- свободное владение основными понятиями анализа и комбинаторики
- дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Теория представлений
- Квантовая механика
- Квантовая теория поля

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает компетенции:

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	УК-1	Демонстрирует способность стратегически и креативно мыслить, творчески подходить к оценке и решению проблем.	Практические занятия, посвящённые критическому чтению специальных текстов. Самостоятельная работа с академическими текстами



Способность генерировать оригинальные теоретические конструкции, гипотезы и исследовательские вопросы	УК-2	Демонстрирует способность выбирать наиболее релевантные изучаемому предмету методы и стратегии исследований	Диспуты, дискуссии, подготовка докладов и выступлений
Способность осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения	УК-5	Анализирует, оценивает потенциал новых учебно-методических ресурсов, целесообразность их использования в процессе исследования	Диспуты, групповые дискуссии, участие в исследовательских и творческих проектах; самостоятельная работа
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, динамических систем, теории вероятностей и математической статистики, математической физики	ПК-1	Демонстрирует способность стратегически и креативно мыслить, творчески подходить к оценке и решению проблем Анализирует мировые тенденции в математических кругах, демонстрирует их понимание и творчески использует в собственных исследованиях	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	ОПК-1	Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность к разработке новых методов исследования, их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав	ОПК-2	Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы



#### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к дисциплинам по выбору, предлагаемым к изучению аспирантам на первом, втором и третьем году обучения.

#### 5. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Гауссовы ансамбли случайных матриц. Меры на матрицах с заданными симметриями. Унитарный ансамбль, ортогональный ансамбль, симплектический ансамбль. Вычисление распределения собственных значений случайных матриц.
2. Описание предельного вида плотности собственных значений. Полукруглый закон Вигнера. Связь с задачей о нахождении равновесного состояния кулоновского газа.
3. Элементы теории ортогональных многочленов. Вычисление корреляционных функций собственных значений методом ортогональных многочленов.
4. Предельные виды корреляционных ядер в различных скейлинговых пределах. Синус ядро, ядро Эйри, ядро Бесселя.
5. Понятие детерминантного процесса. Теорема Эйнарда-Мехты и теорема Гесселя-Виенно о подсчете непересекающихся путей.
6. Применение техники детерминантных процессов для вычисления вероятностей пустот в виде детерминанта Фредгольма. Приложение метода непересекающихся путей к описанию статистики случайных диаграмм Юнга, замощений домино, непересекающихся броуновских движений и случайных блужданий.
7. Модели взаимодействующих частиц и растущих поверхностей. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Стационарные состояния. Построение гидродинамики для систем частиц.
8. Диагонализация марковской матрицы для процесса с простыми запретами методом анзаца Бете. Вычисление переходных вероятностей для произвольного времени. Построение детерминантного процесса. Получение универсальных предельных распределений и корреляционных функций.

#### 6. ОЦЕНИВАНИЕ

Основная форма текущего контроля – решение задач из домашних заданий (7-10 задач по каждой теме). Задачи подбираются так, чтобы их решение потребовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующем разделе курса. Часть задач повышенной сложности отмечается звездочками. Решение таких задач не является необходимым условием для получения отличной оценки, но существенно способствует получению таковой. Оценивается решение задач в процентной доле общего числа решённых в течение семестра задач (включая сюда и задачи со звездочкой) от общего количества выданных в течение семестра задач без звездочек. Таким образом, результат текущего контроля может быть выше 100%

Экзамен и зачёт представляют собою письменные работы продолжительностью 4 часа



каждая. В каждой работе студентам предлагается 8 задач. Для получения 100% результата достаточно правильно решить 6 задач. При решении большего числа задач оценка увеличивается. За полное решение каждой задачи студент получает 10 баллов, окончательный результат экзамена оценивается в процентной доле набранного количества баллов по отношению к 60.

Промежуточная оценка за первый модуль вычисляется по формуле

$$\text{Max}(150, E+N)/15$$

где E - общее количество набранных в зачётной работе баллов в процентах от 60, а N – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в первом модуле задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 задач из зачётной работы.

Итоговая оценка за второй модуль вычисляется по аналогичной формуле

$$\text{Max}(150, E+N)/15$$

где E - общее количество набранных в экзаменационной работе баллов в процентах от 60, а N – общее количество решённых домашних задач (включая задачи со звёздочками) в процентах от общего количества выданных в течение двух модулей задач без звёздочек. Таким образом, для получения максимальной оценки 10 достаточно решить 75% домашних заданий и 5 экзаменационных задач.

В диплом ставится результирующая итоговая оценка по учебной дисциплине.

## 7. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы/задания для домашнего задания или для самостоятельного разбора  
1. Вычислите распределение вероятности собственных значений случайных матриц в

Гауссовом унитарном ансамбле

2. Выведите формулу плотности собственных значений случайной матрицы

3. Постройте ядро корреляционной функции заданного детерминантного процесса.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины



Примерный перечень вопросов к зачету (экзамену) по курсу.

- 1 Метод ортогональных многочленов вычисления корреляционных функций собственных значений случайных матриц.
- 2 Доказательство теоремы Эйнара Мехты
- 3 Доказательство теоремы Гесселя-Виенно.
4. Диагонализация марковской матрицы процесса с простыми запретами методом анзаца Бете.

## 8. РЕСУРСЫ

### 1) Основная литература

Мета, М. Л.

Случайные матрицы / М. Л. Мета; Пер. с англ. Н. В. Цилевич; Под ред. А. М. Вершика. – М.: МЦНМО, 2012. – 648 с. - ISBN 978-5-940579-33-5.

### 2) Дополнительная литература

Розанов, Ю. А.

Случайные процессы: краткий курс : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Розанов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 183 с.

### 3) Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
3.	LaTeX пакет верстки научных текстов	<i>Свободно распространяемый программный продукт</i>

### 4) Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>	
1.	База препринтов Cornell University	<a href="https://arxiv.org/">https://arxiv.org/</a>
2.	База данных зарубежной периодики	<i>Онлайн доступ из локальной сети НИУ</i>



	MathSciNet	ВШЭ <a href="https://library.hse.ru/e-resources">https://library.hse.ru/e-resources</a>
	<b><i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i></b>	
1.	Открытое образование	<a href="https://openedu.ru">https://openedu.ru</a>
2.	Coursera	<a href="http://www.coursera.org">http://www.coursera.org</a>
3.	edX	<a href="https://www.edx.org/course">https://www.edx.org/course</a>
4.	MITOPENCOURSE WARE	<a href="https://ocw.mit.edu/index.htm">https://ocw.mit.edu/index.htm</a>

### 5) Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

Формат изучения дисциплины: без использования онлайн курса