Программа дисциплины «Избранные главы алгебры, геометрии и теории вероятностей»

для подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре
по направлению 01.06.01 «Математика и механика»

профили 01.01.03 Математическая физика;
01.01.04 Геометрия и топология;
01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика;
01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

Авторы программы:
А. Г. Горинов, доцент факультета математики

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике
«09» октября 2015 г., протокол № 11

Москва- 2015

Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению «01.06.01 Математика и механика», профили 01.01.03 Математическая физика; 01.01.04 Геометрия и топология; 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика; 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов.

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению «Математика и механика»;
- Образовательной программой «Математика и механика» подготовки аспиранта;
- Учебными планами подготовки аспирантов по направлению «01.06.01 Математика и механика», вышеуказанных профилей, утвержденными в 2015 г.

Цели освоения дисциплины

Основной целью курса "Избранные главы алгебры, геометрии и теории вероятностей" является изучение и повторение материала, входящего в программу кандидатского экзамена по математике в НИУ ВШЭ.

Задачами освоения дисциплины являются:

1. повторение и систематизация знаний по основным разделам математики;
2. изучение аспирантми основных методов, идеи и результатов из тех частей математики, которые не относятся к непосредственной области исследований;
3. понимание аспирантами связи их области исследований с другими частями математики.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

- основные определения и результаты алгебры, геометрии, анализа и теории вероятностей;
- доказательства теорем, входящих в программу кандидатского экзамена по математике.

Уметь:

- логически стройно излагать материал, входящий в программу кандидатского экзамена по математике;

- применять освоенный материал и методы в собственных научных исследованиях.

Иметь навыки (приобрести опыт):

- решения задач по материалу, входящему в программу кандидатского экзамена по математике;
- короткого, но полного изложения большого объема материала.

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает следующие компетенции:

Компетенция (указываются в соответствии с ОС НИУ ВШЭ)	**Код по ОС НИУ ВШЭ**	**Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)**	**Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции**
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, динамических систем, теории вероятностей и математической статистики, математической физики	ПК-1	Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и иностранном языке и представлять результаты анализа в виде обзора литературы	Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа по изучению литературы и источников. Написание обзора литературы на русском и английском языке.
Способность выбрать математические модели, наилучшим образом отражающие существенные особенности случайных данных	ПК-2	Демонстрирует способность применять современные методы и технологии научной коммуникации на английском языке, творчески применять различные коммуникационные инструменты	Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа
Способность исследовать универсальные математические закономерности, лежащие в основе моделей случайных явлений, и прилагать эти закономерности к изучению свойств конкретных вероятностных моделей	ПК-3	Критически оценивать теоретические и практические работы, демонстрировать способность осмысленно анализировать собственную практику, а также связь теории и практики	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность писать научные статьи высокого качества	ПК-4	Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и английском языке и грамотно	Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа по изучению литературы и источников.

		представлять результаты анализа	Написание обзоров и собственных статей
Способность организовать научно-исследовательскую работу в образовательной организации, в том числе способность руководить научно-исследовательской работой студентов	ПК-7	Выбирать и предлагать к реализации методические модели, методики и приемы обучения, повышающие эффективность (качество) образовательного процесса	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы
Способность делать научные доклады высокого уровня на российских и международных конференциях	ПК-8	Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и английском языке; готовить самостоятельное научное исследование	Выступление на научно-исследовательских семинарах, на российских и международных конференциях; Диспуты, дискуссии
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий	ОПК-1	Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования	Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к обязательным дисциплинам базовой части и проходится на втором году обучения. Основная цель курса -- подготовить аспирантов к сдаче кандидатского экзамена по математике. Этот экзамен аспиранты должны сдать до конца 3 года обучения. Некоторая часть материала экзамена многим аспирантам известна уже в момент поступления. Во время прохождения курса аспиранты выучивают недостающую часть, а также структурируют уже имеющиеся у них знания.

Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Теория множеств			
2	Логика и вычислимые функции			
3	Теория вероятностей			
4	Теория групп			
5	Теория колец			
6	Линейная алгебра			
7	Теория полей			
8	Основы теории чисел			
9	Пределы последовательностей и функций			

10	Общая топология			
11	Основы теории гомотопий			
12	Гомологии и когомологии			
13	Дифференциальное исчисление многих переменных			
14	Интегральное исчисление			
15	Топологические векторные пространства			
16	Ряды Фурье и преобразование Фурье			
17	Геометрия в вещественных аффинных и проективных пространствах; геометрия Лобачевского			
18	Комплексный анализ одной переменной			
19	Обыкновенные дифференциальные уравнения			
20	Гладкие многообразия			
21	Группы и алгебры Ли			
	Итого	114	54	60

Порядок формирования оценок по дисциплине

Итоговая оценка по курсу равна оценке за экзамен (от 0 до 10).

Содержание дисциплины

Тема 1. Теория множеств

Мощность, теорема Кантора-Бернштейна, порядковые числа, принцип трансфинитной индукции, аксиома выбора.

Тема 2. Логика и вычислимые функции

Логика высказываний, исчисление предикатов, понятие алгоритма, вычислимость по Тьюрингу, примеры неразрешимых алгоритмических проблем, классы P и NP, примеры NP-полных задач.

Тема 3. Теория вероятностей

Случайные величины и их распределения, математическое ожидание, дисперсия, независимость и условные вероятности, закон больших чисел, центральная предельная теорема.

Тема 4. Теория групп

Группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, свободные группы, задание групп образующими и соотношениями, простые группы, разрешимые группы. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

Тема 5. Теория колец

Кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

Тема 6. Линейная алгебра

Векторные пространства и линейные отображения, базисы , размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность, полилинейные формы, симметрическая и внешняя степень векторного пространства.

Тема 7. Теория полей

Поля, характеристика, структура и автоморфизмы конечных полей, конечные, алгебраические, сепарабельные расширения, основная теорема теории Галуа.

Тема 8. Основы теории чисел

Квадратичный закон взаимности, приближение вещественных чисел рациональными дробями , цепные дроби, теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными, трансцендентность числа е.

Тема 9. Пределы последовательностей и пределы функций

Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

Тема 10. Общая топология

Топологические пространства, компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра.

Тема 11. Основы теории гомотопий

Гомотопия отображений, гомотопическая эквивалентность, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

Тема 12. Гомологии и когомологии

Клеточные разбиения, группы гомологий и когомологий, двойственность Пуанкаре.

Тема 13. Дифференциальное исчисление многих переменных

Производные и дифференциалы отображений из R^n в R^m, производная сложной функции, ряд Тейлора, теорема о неявной функции, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

Тема 14. Интегральное исчисление

Мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

Тема 15. Топологические векторные пространства

Топологические векторные пространства, нормированные пространства, теоремы Хана-Банаха, Банаха об обратном отображении и Банаха-Штейнгауза. Пространства L_p, неравенства Гёльдера и Минковского.

Тема 16. Ряды Фурье и преобразование Фурье

Ряд Фурье, теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы функций в L_2, условия Дини сходимости ряда Фурье. Преобразование Фурье, его основные свойства.

Тема 17. Геометрия в вещественных аффинных и проективных пространствах; геометрия Лобачевского

Аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Тема 18. Комплексный анализ одной переменной

Комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

Тема 19. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задача Коши, теорема существования и единственности. Решение уравнений методом разделения переменных. Линейные уравнения и системы. Устойчивость решений.

Тема 20. Гладкие многообразия

Определение гладкого многообразия. Подмногообразия, лемма Сарда. Трансверсальность. Приближение непрерывных отображений гладкими. Теоремы Уитни о вложениях и погружениях гладких многообразий в евклидовы пространства (слабые версии).

Тема 21. Группы и алгебры Ли

Определения групп и алгебр Ли. Касательное пространство к группе Ли и её алгебра Ли, экспоненциальное отображение. Представления групп и алгебр Ли. Примеры: GL(n), gl(n), SL(n), sl(n). Классификация неприводимых представлений комплексной sl(2).

Пример оценочного средства

Существуют ли отображения из CP^2 в себя степени -1? Обоснуйте ответ.

Образовательные технологии

На занятиях обсуждаются основные определения и идеи тем из приведенной выше программы, приводятся доказательства или наброски доказательств основных теорем, а также разбираются вопросы, аналогичные тем, которые могут возникнуть на кандидатском экзамене.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

Э. Б. Винберг, Курс алгебры. — М: Изд-во «МЦНМО», 2013.

В. А. Зорич, Математический анализ. Т. 1. — М: Изд-во «МЦНМО», 2015.

В. А. Зорич, Математический анализ. Т. 2. — М: Изд-во «МЦНМО», 2015.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, Геометрия – М: Изд-во «МЦНМО», 2007.

P. J. Cameron, A course on number theory, http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/nt.pdf

K. Conrad, Irrationality of pi and e, https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/irrational.pdf

P. Garrett, Liouville's theorem on diophantine approximation, http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes_2013-14/04b_Liouville_approx.pdf

A. Hatcher, Algebraic topology, http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html

Sigurdur Helgason. 18.112 Functions of a Complex Variable. Fall 2008. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. *License:* Creative Commons BY-NC-SA.

Sigurdur Helgason. 18.755 Introduction to Lie Groups. Fall 2004. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. *License:* Creative Commons BY-NC-SA.

Richard Melrose. 18.102 Introduction to Functional Analysis. Spring 2009. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. *License:* Creative Commons BY-NC-SA.

Tomasz Mrowka. 18.965 Geometry of Manifolds. Fall 2004. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Michael Sipser. *18.404J Theory of Computation.* Fall 2006. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Jeff Viaclovsky. 18.125 Measure and Integration. Fall 2003. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Дополнительная литература

В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.

А. Х. Шень, Н. К. Верещагин, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.

А. Х. Шень, Н. К. Верещагин, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.

Прочая литература

М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во «Наука», 1970.

А. Н. Ширяев, Вероятность -. Кн.1: Вероятность - 1 : элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. — М: Изд-во «МЦНМО», 2007.

Нормативно-правовые документы

Образовательные стандарты НИУ ВШЭ https://www.hse.ru/standards/standard

Программные средства

Для успешного освоения дисциплины аспирант использует следующие программные средства:

- LaTeX
- Браузеры

Материально-техническое обеспечение дисциплины

Стационарный компьютер или ноутбук.