**Рабочая программа дисциплины «Избранные главы алгебры, геометрии и теории вероятностей»**

для подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

по направлению 01.06.01 «Математика и механика»

образовательная программа «Математика и механика»

Авторы программы:

А. Г. Горинов, доцент факультета математики

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«16» октября 2018 г., протокол № 10

Общая трудоемкость 3 з.е.

Часов по учебному плану 114

В том числе:

Аудиторные занятия – 54

Лекции – 27

Семинары - 27

Самостоятельная работа 60

Москва- 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения разработчика программы.*

**Область применения и нормативные ссылки**

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению «01.06.01 Математика и механика», образовательной программе «Математика и механика» и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов.

Программа разработана в соответствии c:

* Образовательным стандартом НИУ ВШЭ подготовки научно-педагогических кадров по направлению «Математика и механика»;
* Образовательной программой «Математика и механика» подготовки аспиранта;
* Учебным планом подготовки аспирантов по направлению «01.06.01 Математика и механика», образовательной программе «Математика и механика», утвержденным в 2018 г.

**Цели освоения дисциплины**

Основной целью курса "Избранные главы алгебры, геометрии и теории вероятностей" является изучение и повторение материала, входящего в программу кандидатского экзамена по математике в НИУ ВШЭ.

**Задачами освоения дисциплины являются:**

1. повторение и систематизация знаний по основным разделам математики;
2. изучение аспирантми основных методов, идеи и результатов из тех частей математики, которые не относятся к непосредственной области исследований;
3. понимание аспирантами связи их области исследований с другими частями математики.

**Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

**Знать**:

* основные определения и результаты алгебры, геометрии, анализа и теории вероятностей;
* доказательства теорем, входящих в программу кандидатского экзамена по математике.

**Уметь**:

* логически стройно излагать материал, входящий в программу кандидатского экзамена по математике;
* применять освоенный материал и методы в собственных научных исследованиях.

**Иметь навыки** (приобрести опыт):

* решения задач по материалу, входящему в программу кандидатского экзамена по математике;
* короткого, но полного изложения большого объема материала.

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает следующие компетенции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Компетенция   (указываются в соответствии с ОС НИУ ВШЭ)** | **Код по ОС НИУ ВШЭ** | **Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)** | **Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции** |
| Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, динамических систем, теории вероятностей и математической статистики, математической физики | ПК-1 | Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и иностранном языке и представлять результаты анализа в виде обзора литературы | Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа по изучению литературы и источников.  Написание обзора литературы на русском и английском языке. |
| Способность выбрать математические модели, наилучшим образом отражающие существенные особенности случайных данных | ПК-2 | Демонстрирует способность применять современные методы  и технологии научной коммуникации на английском языке, творчески применять различные коммуникационные инструменты | Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа |
| Способность исследовать универсальные математические закономерности, лежащие в основе моделей случайных явлений, и прилагать эти закономерности к изучению свойств конкретных вероятностных моделей | ПК-3 | Критически оценивать теоретические и практические работы, демонстрировать способность осмысленно анализировать собственную практику, а также связь теории и практики | Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы |
| Способность писать научные статьи высокого качества | ПК-4 | Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и английском языке и грамотно представлять результаты анализа | Лекционные и семинарские занятия. Самостоятельная работа по изучению литературы и источников.  Написание обзоров и собственных статей |
| Способность организовать научно-исследовательскую работу в образовательной организации, в том числе способность руководить научно-исследовательской работой студентов | ПК-7 | Выбирать и предлагать к реализации методические модели, методики и приемы обучения, повышающие эффективность (качество) образовательного процесса | Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы |
| Способность делать научные доклады высокого уровня на российских и международных конференциях | ПК-8 | Демонстрирует способность критически анализировать научную литературу по специальности на русском и английском языке; готовить самостоятельное научное исследование | Выступление на научно-исследовательских семинарах, на российских и международных конференциях; Диспуты, дискуссии |
| Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1) | ОПК-1 | Демонстрирует способность эффективно и творчески работать в исследовательских группах, выбирать наиболее эффективные методы и технологии исследования | Практическая работа в различных формах аудиторной и самостоятельной работы |

**Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина относится к обязательным дисциплинам базовой части и проходится на втором году обучения. Основная цель курса -- подготовить аспирантов к сдаче кандидатского экзамена по математике. Этот экзамен аспиранты должны сдать до конца 3 года обучения. Некоторая часть материала экзамена многим аспирантам известна уже в момент поступления. Во время прохождения курса аспиранты выучивают недостающую часть, а также структурируют уже имеющиеся у них знания.

**Тематический план учебной дисциплины**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название темы | Всего часов | Практические занятия | Самостоятельная  работа |
| 1 | Теория множеств |  |  |  |
| 2 | Логика и вычислимые функции |  |  |  |
| 3 | Теория вероятностей |  |  |  |
| 4 | Теория групп |  |  |  |
| 5 | Теория колец |  |  |  |
| 6 | Линейная алгебра |  |  |  |
| 7 | Теория полей |  |  |  |
| 8 | Основы теории чисел |  |  |  |
| 9 | Пределы последовательностей и функций |  |  |  |
| 10 | Общая топология |  |  |  |
| 11 | Основы теории гомотопий |  |  |  |
| 12 | Гомологии и когомологии |  |  |  |
| 13 | Дифференциальное исчисление многих переменных |  |  |  |
| 14 | Интегральное исчисление |  |  |  |
| 15 | Топологические векторные пространства |  |  |  |
| 16 | Ряды Фурье и преобразование Фурье |  |  |  |
| 17 | Геометрия в вещественных аффинных и проективных пространствах; геометрия Лобачевского |  |  |  |
| 18 | Комплексный анализ одной переменной |  |  |  |
| 19 | Обыкновенные дифференциальные уравнения |  |  |  |
| 20 | Гладкие многообразия |  |  |  |
| 21 | Группы и алгебры Ли |  |  |  |
|  | **Итого** | 114 | 54 | 60 |

**Порядок формирования оценок по дисциплине**

Итоговая оценка по курсу равна оценке за экзамен (от 0 до 10).

**Содержание дисциплины**

**Тема 1. Теория множеств**

Мощность, теорема Кантора-Бернштейна, порядковые числа, принцип трансфинитной индукции, аксиома выбора.

**Тема 2. Логика и вычислимые функции**

Логика высказываний, исчисление предикатов, понятие алгоритма, вычислимость по Тьюрингу, примеры неразрешимых алгоритмических проблем, классы P и NP, примеры NP-полных задач.

**Тема 3. Теория вероятностей**

Случайные величины и их распределения, математическое ожидание, дисперсия, независимость и условные вероятности, закон больших чисел, центральная предельная теорема.

**Тема 4. Теория групп**

Группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, свободные группы, задание групп образующими и соотношениями, простые группы, разрешимые группы. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

**Тема 5. Теория колец**

Кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

**Тема 6. Линейная алгебра**

Векторные пространства и линейные отображения, базисы , размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность, полилинейные формы, симметрическая и внешняя степень векторного пространства.

**Тема 7. Теория полей**

Поля, характеристика, структура и автоморфизмы конечных полей, конечные, алгебраические, сепарабельные расширения, основная теорема теории Галуа.

**Тема 8. Основы теории чисел**

Квадратичный закон взаимности, приближение вещественных чисел рациональными дробями , цепные дроби, теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными, трансцендентность числа e.

**Тема 9. Пределы последовательностей и пределы функций**

Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

**Тема 10. Общая топология**

Топологические пространства, компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра.

**Тема 11. Основы теории гомотопий**

Гомотопия отображений, гомотопическая эквивалентность, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

**Тема 12. Гомологии и когомологии**

Клеточные разбиения, группы гомологий и когомологий, двойственность Пуанкаре.

**Тема 13. Дифференциальное исчисление многих переменных**

Производные и дифференциалы отображений из R^n в R^m, производная сложной функции, ряд Тейлора, теорема о неявной функции, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

**Тема 14. Интегральное исчисление**

Мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

**Тема 15. Топологические векторные пространства**

Топологические векторные пространства, нормированные пространства, теоремы Хана-Банаха, Банаха об обратном отображении и Банаха-Штейнгауза. Пространства L\_p, неравенства Гёльдера и Минковского.

**Тема 16. Ряды Фурье и преобразование Фурье**

Ряд Фурье, теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы функций в L\_2, условия Дини сходимости ряда Фурье. Преобразование Фурье, его основные свойства.

**Тема 17. Геометрия в вещественных аффинных и проективных пространствах; геометрия Лобачевского**

Аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

**Тема 18. Комплексный анализ одной переменной**

Комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

**Тема 19. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Задача Коши, теорема существования и единственности. Решение уравнений методом разделения переменных. Линейные уравнения и системы. Устойчивость решений.

**Тема 20. Гладкие многообразия**

Определение гладкого многообразия. Подмногообразия, лемма Сарда. Трансверсальность. Приближение непрерывных отображений гладкими. Теоремы Уитни о вложениях и погружениях гладких многообразий в евклидовы пространства (слабые версии).

**Тема 21. Группы и алгебры Ли**

Определения групп и алгебр Ли. Касательное пространство к группе Ли и её алгебра Ли, экспоненциальное отображение. Представления групп и алгебр Ли. Примеры: GL(n), gl(n), SL(n), sl(n). Классификация неприводимых представлений комплексной sl(2).

**Пример оценочного средства**

Существуют ли отображения из CP^2 в себя степени -1? Обоснуйте ответ.

**Образовательные технологии**

На занятиях обсуждаются основные определения и идеи тем из приведенной выше программы, приводятся доказательства или наброски доказательств основных теорем, а также разбираются вопросы, аналогичные тем, которые могут возникнуть на кандидатском экзамене.

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**Основная литература**

*Э. Б. Винберг, Курс алгебры. — М: Изд-во «МЦНМО», 2013.*

*В. А. Зорич, Математический анализ. Т. 1. — М: Изд-во «МЦНМО», 2015.*

*В. А. Зорич, Математический анализ. Т. 2. — М: Изд-во «МЦНМО», 2015.*

*В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, Геометрия – М: Изд-во «МЦНМО», 2007.*

*P. J. Cameron, A course on number theory,* [*http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/nt.pdf*](http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/nt.pdf)

*K. Conrad, Irrationality of pi and e,* [*https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/irrational.pdf*](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/irrational.pdf)

*P. Garrett, Liouville's theorem on diophantine approximation, http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes\_2013-14/04b\_Liouville\_approx.pdf*

*A. Hatcher, Algebraic topology,* [*http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html*](http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html)

*Sigurdur Helgason.* 18.112 Functions of a Complex Variable. *Fall 2008. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare,* [*https://ocw.mit.edu*](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-112-functions-of-a-complex-variable-fall-2008#_blank)*. License:* [*Creative Commons BY-NC-SA*](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)*.*

*Sigurdur Helgason.* 18.755 Introduction to Lie Groups. *Fall 2004. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare,* [*https://ocw.mit.edu*](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-755-introduction-to-lie-groups-fall-2004#_blank)*. License:* [*Creative Commons BY-NC-SA*](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)*.*

*Richard Melrose.* 18.102 Introduction to Functional Analysis. *Spring 2009. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare,* [*https://ocw.mit.edu*](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-102-introduction-to-functional-analysis-spring-2009#_blank)*. License:* [*Creative Commons BY-NC-SA*](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)*.*

*Tomasz Mrowka.* 18.965 Geometry of Manifolds. *Fall 2004. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare,* [*https://ocw.mit.edu*](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-965-geometry-of-manifolds-fall-2004#_blank)*. License:* [*Creative Commons BY-NC-SA*](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)*.*

Michael Sipser. 18.404J Theory of Computation. Fall 2006. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, [https://ocw.mit.edu](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-404j-theory-of-computation-fall-2006#_blank). License: [Creative Commons BY-NC-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

*Jeff Viaclovsky.* 18.125 Measure and Integration. *Fall 2003. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare,* [*https://ocw.mit.edu*](https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-125-measure-and-integration-fall-2003#_blank)*. License:* [*Creative Commons BY-NC-SA*](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)*.*

**Дополнительная литература**

*В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.*

*А. Х. Шень, Н. К. Верещагин, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.*

*А. Х. Шень, Н. К. Верещагин, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления — М: Изд-во «МЦНМО», 2012.*

**Прочая литература**

*М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во «Наука», 1970.*

*А. Н. Ширяев, Вероятность -. Кн.1: Вероятность - 1 : элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. — М: Изд-во «МЦНМО», 2007.*

**Нормативно-правовые документы**

Образовательные стандарты НИУ ВШЭ <https://www.hse.ru/standards/standard>

**Программные средства**

Для успешного освоения дисциплины аспирант использует следующие программные средства:

     LaTeX

     Браузеры

**Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Стационарный компьютер или ноутбук.