Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____________С.Ю. Рощин

Одобрено на заседании
Академического совета
Аспирантской школы по математике

Согласовано
Академический директор
Аспирантской школы по математике
____________ А.Г. Горинов

Программа вступительного испытания по специальности основной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Математика и механика

Научные специальности:
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика
1.1.3 Геометрия и топология
1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Москва 2023

1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

2. Структура вступительного испытания

Форма проведения: вступительные испытания по профилям 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.1.3 Геометрия и топология, 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика, 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

2.1. Оценка индивидуальных достижений. Структура портфолио

Для участия в конкурсе индивидуальных достижений (портфолио) абитуриент может предоставить следующие документы на русском или английском языке:

1. Резюме (CV), включающее список публикаций, сведения об участии в конференциях, школах, исследовательских проектах, научных грантах, опыте работы, знании языков и программного обеспечения и т.д.

2. Копия документа об образовании с перечнем пройденных дисциплин и оценок по этим дисциплинам. Если абитуриент еще не получил диплом магистра, необходимо приложить копию полного списка уже пройденных дисциплин с оценками.

3. Научные публикации, препринты, выпускные, курсовые и другие письменные работы.

4. Информация об участии в российских и международных конференциях (с докладом) с указанием названия и места проведения конференции и темы доклада.

5. Как минимум два рекомендательных письма.

6. Документы, подтверждающие другие достижения, например, победы в студенческих олимпиадах, конкурсах студенческих работ, получение индивидуальных академических стипендий и грантов на обучение, если таковые существуют.

2.2. Критерии оценки портфолио

Оценка за портфолио составляет от 0 до 50 баллов. В итоговой сумме баллов учитывается максимальная оценка из полученных за отдельные категории индивидуальных достижений: письменные работы, CV, рекомендации.

Критерий оценки	**Количество баллов**
Письменные работы	**Максимум - 50 баллов**
Тексты реферативного характера	от 0 до 10 баллов
Реферативные тексты с отдельными оригинальными разультатами	от 11 до 20 баллов
Публикации в журналах из списка ВАК или препринты на английском языке в репозитории arxiv.org	от 21 до 30 баллов
Публикации, индексируемые базой Math Reviews/MathSciNet	от 31 до 40 баллов
Публикации Q1-Q2 по WoS или Scopus	от 41 до 50 баллов

По решению приемной комиссии за препринты и другие тексты может выставляться оценка, аналогичная оценкам за сопоставимые статьи.	
CV	**Максимум - 50 баллов**
Доклады на студенческих конференциях	От 0 до 5 баллов
Доклады на региональных конференциях	От 0 до 10 баллов
Доклады на международных конференциях	От 0 до 20 баллов
Участие в студенческих или школьных олимпиадах	От 0 до 10 баллов
Победы в студенческих или школьных олимпиадах	От 0 до 25 баллов
Участие в исследовательских проектах	От 0 до 10 баллов
Работа учебным ассистентом	От 0 до 5 баллов
Продвинутые математические курсы (уровня магистратуры и выше)	От 0 до до 5 баллов за курс (начисляемые баллы зависят как от полученной за курс оценки, так и от положения университета в предметном рейтинге по математике)
Опыт работы с LaTeX	От 0 до 5 баллов
Опыт работы с системами компьютерной алгебры	От 0 до 10 баллов
Знание языков программирования (C++, Python, ...)	От 0 до 7 баллов
Оценка за CV равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50.	
Рекомендации (как минимум 2)	**Максимум – 50 баллов**
Рекомендация содержит описание научных результатов абитуриента	До 10 баллов
Рекомендатель имеет постоянную позицию в университете с высоким предметным рейтингом по математике	До 5 баллов для топ-200, до 10 баллов для топ 100, до 20 баллов для топ-50.
Рекомендатель считает абитуриента лучшим в определенной группе	До 10 баллов

Рекомендатель высоко оценивает мотивированность абитуриента	До 5 баллов
Рекомендатель высоко оценивает коммуникабельность, трудоспособность и другие качества абитуриента	До 5 баллов
Рекомендатель согласен быть научным руководителем абитуриента, и рекомендация содержит описание уже имеющихся наработок абитуриента по теме предполагаемой диссертации	До 35 баллов
Оценка за рекомендации равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50.	

Минимальный балл (неудовлетворительная оценка) за портфолио – до 13 баллов включительно. Для участия в конкурсе по итогам оценки индивидуальных достижений необходимо набрать суммарно не менее 14 баллов.

2.3. Структура и процедура проведения собеседования

Собеседование состоит из двух частей.

В первой части абитуриент рассказывает о себе, о мотивах, которыми он руководствуется, выбирая математику как направление своего обучения и дальнейшей профессиональной деятельности, а также о направлении своих исследований и предполагаемой теме диссертации. На первую часть собеседования отводится 15 минут.

Во второй части оценивается теоретическая подготовленность абитуриента. Абитуриент получает два вопроса из теоретической части программы собеседования. Ему предоставляется 40 минут на подготовку и 10-15 минут на ответ. По решению приемной комиссии один или оба теоретических вопроса могут быть заменены задачами по материалу теоретической части.

Программы теоретической части собеседования для всех профилей содержатся в разделе 3 настоящего документа.

Собеседование проводится на русском или английском языке (по желанию абитуриента). По предварительному согласованию с абитуриентом собеседование может проводиться дистанционно с использованием информационных технологий.

2.4. Критерии оценки собеседования

Первая часть собеседования комиссии с абитуриентом оценивается исходя из 20 баллов. Оценивается умение абитуриента проводить самостоятельные исследования, знание методов, имеющийся опыт исследовательской деятельности.

Примерные вопросы:

- Какие области математики Вас интересуют?
- Есть ли у Вас научные результаты? Если да, то опишите некоторые из них.
- Над какими задачами Вы планируете работать в случае приема в аспирантуру? Есть ли у Вас уже какие-то продвижения в решении этих задач? Если да, то какие?

Во второй части собеседования комиссия оценивает уровень математической подготовки абитуриентов. Каждый вопрос оценивается по 15-балльной шкале.

Критерии оценивания

	Баллы
Ответ полный, логичный, конкретный, без замечаний, продемонстрированы знания материала программы теоретической части.	12-15

Ответ логичный, конкретный, присутствуют незначительные пробелы в знания материала программы теоретической части.	8-11
Ответ неполный, отсутствует логичность повествования или допущены существенные логические ошибки.	1-7
Ответ на поставленный вопрос не дан.	0

Для участия в конкурсе поступающим необходимо набрать не менее 6 баллов за первую часть собеседования и не менее 10 баллов за вторую часть собеседования.

В случае набора абитуриентами равного количества баллов (полупроходного балла), преимущества получается абитуриент, соответствующий перечисленным ниже критериями. Критерии представлены в порядке убывания значимости.

1. Более высокая оценка за письменные работы.
2. Более высокая оценка за рекомендации.
3. Более высокая оценка за вторую часть собеседования.
4. Более высокая оценка за CV.

3. Содержание теоретической части собеседования

3.1 Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Вопросы по вещественному анализу

1. Действительные числа. Расстояние в R и R^n. Открытые и замкнутые множества. Замыкание множества. Предел последовательности. Инфимум и супремум подмножеств числовой прямой. Структура открытых множеств на прямой. Сумма ряда.

2. Топологические пространства, база топологии, непрерывность функции, предел последовательности, сепарабельность. Метрические пространства, полнота, пополнение. Топология, порожденная метрикой.

3. Компактность, основные свойства компактных пространств. Вполне ограниченные множества. Критерий Хаусдорфа. Теоремы Вейерштрасса и Стоуна - Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. Критерий компактности в C[a,b].

4. Мера Лебега на отрезке и на общем измеримом пространстве. Множество типа Кантора положительной меры Лебега.

5. Интеграл Лебега и его основные свойства. Связь с интегралом Римана. Неравенства Гёльдера, Минковского, Йенсена.

6. Теоремы Егорова, Лузина, Беппо Леви, Фату. Сходимость почти всюду, по мере, в среднем, поточечная, связь между ними.

7. Теорема Фубини. Теорема Радона - Никодима.

8. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной. Формула Ньютона - Лейбница.

9. Производная отображений в R^n. Связь с частными производными. Теоремы об обратной и неявной функции.

10. Гамма и бета функции Эйлера. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его простейшие свойства.

Литература:

1. В. А. Зорич. Математический анализ, т. 1, 2. Любое издание.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.
3. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020.

2. *Вопросы по комплексному анализу*

1. Последовательности и ряды комплексных чисел. Функции комплексного переменного, дифференцируемость, геометрический смысл производной. Условия Коши-Римана. Элементарные функции комплексного переменного.

2. Интегрирование функций комплексного переменного по кривым. Формула для вычисления с помощью параметризации. Интегральная теорема Коши. Теорема о первообразной. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфной функции. Принцип максимума модуля. Теорема Мореры.

3. Степенные ряды комплексного переменного. Радиус сходимости. Аналитичность суммы. Представление голоморфных функций степенными рядами. Единственность разложения. Разложения элементарных функций.

4. Целые функции. Теорема Лиувилля.

5. Аналитическое продолжение голоморфных функций. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Многозначные аналитические функции $Ln(z)$, z^{α}. Точки ветвления.

6. Ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Изолированные особые точки. Теорема о главной части ряда Лорана в окрестности устранимой точки. Полюс. Порядок полюса. Вид ряда Лорана в окрестности полюса. Существенно особые точки. Вид ряда Лорана в окрестности существенно особой точки. Теорема Пикара. Классификация особых точек.

7. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью теоремы о вычетах. Лемма Жордана. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры.

8. Конформные отображения и их основные свойства. Критерий локальной однолистности. Принцип соответствия границ. Теорема Римана.

Литература:

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Любое издание.
2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Любое издание.
3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. Любое издание.

3. *Вопросы по функциональному анализу*

1. Нормированные, банаховы, евклидовы, гильбертовы пространства. Основные часто используемые пространства функций и последовательностей.

2. Ортогональные проекции. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры базисов в $L^2[a,b]$ и $L^2(R)$. Сходимость рядов Фурье.

3. Линейные функционалы. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана - Банаха. Отделимость выпуклых множеств.

4. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Сопряженные к основным часто используемым пространствам.

5. Слабая и *-слабая топологии. Теорема Банаха - Алаоглу.

6. Линейные операторы между нормированными пространствами. Норма, непрерывность и ограниченность оператора. Сопряженный к ограниченному оператору и его норма.

7. Спектр и резольвента ограниченного оператора. Компактные операторы и их свойства. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма.

8. Самосопряженные ограниченные операторы и их спектры. Теорема Гильберта -Шмидта. Представление самосопряженного оператора в виде умножения на функцию.

9. Локально выпуклые пространства. Пространства пробных функций *D* и *S*. Обобщенные функции классов *D'* и *S'*. Дифференцирование обобщенных функций.

10. Преобразование Фурье в пространствах *S, S'*.

Литература

1. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020. – 756 с.

2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.

3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 358 с.

4. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

5. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014. – 560 с.

3.2. Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

Программа состоит из двух частей. Каждый абитуриент сдает на выбор одну из частей в соответствии с направленностью будущей научно-исследовательской работы (диссертации).

3.2.1 Часть 1 "Дифференциальные уравнения"

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.- М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

3.2.2 Часть 2 «Математическая физика»

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения линейных уравнений и систем произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Автономные системы дифференциальных уравнений.
2. Ряд и преобразование Фурье и их основные свойства. Применение для решения дифференциальных уравнений.
3. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Спектральное представление линейного оператора.
4. Интегральные уравнения Фредгольма. Метод последовательных приближений. Теоремы Фредгольма.
5. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Решение нелинейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка методом характеристик.
6. Обобщенные функции и их свойства. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Построение фундаментального решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Функции Грина.
7. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типа. Постановка основных краевых и начальных задач и их методы решения.
8. Основные свойства гармонических функций (формула Грина, теорема о среднем, принцип максимума, теорема о внутренней устранимой особенности).
9. Разложение голоморфных функций в ряды Тейлора и Лорана. Классификация особых точек. Теорема Коши о вычетах. Целые функции. Теорема Лиувилля.
10. Аналитическое продолжение. Римановы поверхности.
11. Методы Лапласа и стационарной фазы для вычисления асимптотик интегралов. 12. Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли. Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура.
13. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса.
14. Римановы многообразия и метрики. Геодезические. Связности, их тензоры кривизны и кручения. Параллельный перенос.
15. Случайные величины и их математические ожидания. Дисперсия. Нормальное распределение и распределение Пуассона. Центральная предельная теорема. 16. Корреляционные

функции. Марковские случайные процессы. Гауссовские процессы и процесс Пуассона. Броуновское движение.

17. Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения.

18. Одномерное движение. Движение в центральном поле. Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения.

19. Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера.

20. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона Якоби.

21. Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Релятивистская механика. 22. Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии импульса. Заряд в электромагнитном поле. Электромагнитные волны.

23. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Льенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн.

24. Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса.

25. Основные положения квантовой механики. Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности.

26. Уравнение Шредингера. Потенциальная яма. Прохождение через барьер. Движение в центральном поле. Атом водорода. Квазиклассическое приближение.

27. Уравнение Дирака. Спин. Тождественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы.

28. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока.

29. Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния.

30. Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Закон возрастания энтропии.

31. Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс.

32. Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения. Флуктуации.

33. Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Свободная энергия и уравнение состояния. Распределения Бозе и Ферми. Фазовые переходы второго рода.

Рекомендуемая литература:

1. М. Рид, Б. Саймон, Современные методы математической физики, М. Мир, 1982.

2. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.

3. И.Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М. Изд-во Моск. ун-та, 1984.

4. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

5. Арнольд В.И., Лекции по уравнениям с частными производными, Независимый ун-т, М., 1995.

6. В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М. Наука, 2003.

7. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, Уравнения математической физики, ФИЗМАТЛИТ, 2003.

8. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике, Наука, М., 1972.

9. Комеч А.И., Практическое решение уравнений математической физики, МГУ, 1993.

10. Белов В.В., Воробьев Е.М., Сборник задач по дополнительным главам математической физики, «Высшая школа», М., 1978.

11. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

12. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1951.

13. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М., Наука, 1979.

14. А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. М., МГУ, 1980.

15. Л.С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Наука, 1973.
16. А.А. Кириллов. Элементы теории представлений. М., Наука, 1972.
17. А.Н. Ширяев. Вероятность. М., Наука, 1980.
18. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1969.
19. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. М., Наука. 1974.
20. Э. Уиттекер. Аналитическая динамика. М., УРСС, 1999.
21. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики. М., Наука, 1973-1986.
22. К. Хуанг. Статистическая механика. М., Мир, 1966

3.3. Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.3 Геометрия и топология

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература.

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.- М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

3.4. Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

1. Пространство элементарных событий. Алгебра и σ-алгебра событий. Аксиоматика Колмогорова. Дискретные вероятностные пространства.

2. Независимые события. Условные вероятности в дискретном случае. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. Случайные величины и их функции распределения. Независимость случайных величин.

4. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Основные примеры дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений: Бернулли, Гаусса, Пуассона, Коши.

5. Определение математического ожидания случайной величины. Основные свойства математического ожидания. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышёва.

6. Дисперсия случайной величины. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

7. Характеристические функции (преобразование Фурье) случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности.

8. Совместное распределение случайных величин. Характеризация независимости через совместное распределение. Многомерное нормальное распределение. Существование последовательности независимых случайных величин с заданными распределениями.

9. Закон больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин: формулировка теоремы Колмогорова и доказательство сходимости в среднем квадратическом при наличии дисперсии.

10. Слабая сходимость вероятностных мер. Описание слабой сходимости на прямой в терминах функций распределения и в терминах характеристических функций.

11. Связи между различными видами сходимости случайных величин: почти всюду, по вероятности, в среднем, в среднем квадратическом, по распределению.

12. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

13. Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры и его основные свойства. Определение мартингала. Примеры. Формулировка теоремы Дуба о сходимости мартингалов,
ограниченных в среднем квадратическом.

14. Понятие случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса. Формулировка теоремы Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.

15. Марковская цепь с конечным числом состояний. Стационарные распределения марковской цепи и сходимость к ним переходных вероятностей.

16. Определения винеровского процесса и пуассоновского процесса. Основные свойства винеровского процесса.

17. Типичные задачи математической статистики. Точечные оценки и их свойства: несмещенность, состоятельность, оптимальность, асимптотическая нормальность.
Построение точечных оценок методом максимального правдоподобия и моментов.

18. Оценка параметров с помощью доверительных интервалов. Построение доверительных интервалов для неизвестных среднего и дисперсии в случае выборки из нормального распределения. Распределение Стьюдента.

19. Проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Теорема Неймана – Пирсона.

20. Проверка гипотезы о виде распределения. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Гистограмма. Формулировка теоремы Гливенко – Кантелли. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Едиториал УРСС, 2003.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Физматлит, 2007.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., ЛКИ, 2007.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. 2-е изд. М., Наука, 1989.
5. Кораллов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы. М., МЦНМО, 2013.
6. Ламперти Дж. Вероятность. М., Наука, 1973.
7. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., Изд-во МГУ, 1963.
8. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М., Наука, 1986.
9. Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. М., Юрайт, 2019.
10. Прохоров Ю.В., Прохоров А.В. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. М., МЦНМО, 2019.

11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М., Книжный дом «Либроком», 2010.

12. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М., Дрофа, 2007.

13. Ширяев А.Н. Вероятность. Т. 1, 2. М., МЦНМО, 2007.

14. Ширяев А.Н., Эрлих И.Г., Яськов П.А. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). М., МЦНМО, 2013.

3.5. Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра и теория чисел

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.- М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004